



**Коммерциялық емес
акционерлік қоғам**

**ҒҰМАРБЕК ДӘУКЕЕВ
АТЫНДАҒЫ АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ
БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТІ**

Ғарыштық инженерия
кафедрасы

ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА

6В07128 «Аэроғарыштық инженерия» білім беру бағдарламасы студенттері үшін есептік-сызба жұмыстарды орындауға арналған тапсырмалар және әдістемелік нұсқаулар

Алматы 2025

ҚҰРАСТЫРУШЫ: Р.Қ.Қойлыбаева. Теориялық механика. 6В07128 «Аэроғарыштық инженерия» білім беру бағдарламасы студенттері үшін есептік-сызба жұмыстарды орындауға арналған тапсырмалар және әдістемелік нұсқаулар. – Алматы: АЭЖБУ, 2025. – 29 б.

«Теориялық механика» пәні 6В07128 «Аэроғарыштық инженерия» білім беру бағдарламасы студенттері үшін базалық пән болып табылады. Пәнді оқуда студенттер 3 есептік-сызба жұмысын орындау керек. Әдістемелік нұсқауда студенттер орындайтын есептік-сызба жұмыстарының тапсырмалары және орындау мысалдары келтірілген. Ұсынылатын оқулықтардың тізімі берілген.

Осы әдістемелік нұсқауды «Қатты дене механикасы», «Механика», «Механикалық жүйелер» пәндерін оқуда қолдануға болады.

Кесте – 6, ил. – 21, әдеб. көрсеткіші – 5 атау.

Пікір беруші: доцент,(PhD) ф.д., қауым.проф.

Ермекбаев М.М.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2025 ж. басылым жоспары бойынша басылады.

© «Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, 2025 ж.

Кіріспе

«Теориялық механика» пәні бойынша 6B07128 «Аэроғарыштық инженерия» білім беру бағдарламасы студенттері семестр ішінде 3 есептік-сызба жұмысын орындап қорғау керек. Әр есептік-сызба жұмысы екі тапсырмадан тұрады. Барлық тапсырмалар үшін 10 сұлба және кестелерден алынатын деректердің 10 нұсқасы келтірілген. Студенттерге сұлба нөмірі мен нұсқаны оқытушы айтады. Басқа сұлба немесе басқа нұсқа бойынша орындалған жұмыс қабылданбайды.

Есептік-сызба жұмыстар университет стандартының талаптары бойынша безендірілуі керек /1/. Жұмыстардың графикалық бөлімін AutoCAD, SOLIDWORKS немесе басқа графикалық ортада орындаған дұрыс.

Студенттер тапсырманы орындау алдында дәрістер, оқулықтар немесе оқу құралдары бойынша сәйкес тақырыпты игеріп, нұсқаудағы келтірілген мысалмен танысуы керек.

Есептік-сызба жұмыстарын қорғау кезінде студент мәселенің қойылуын, шешу жолы мен қорытындыны түсіндіруі, тапсырма және сәйкес теориялық материал бойынша сұрақтарға жауап беруі керек.

Жұмыстарды бағалауда тапсырма орындалуының дұрыстығы, жұмыстың университет стандартына сәйкес безендірілуі, мәтін редакторы мен графикалық ортаның қолданылуы және қойылған сұрақтарға берілген жауаптарының дұрыстығы мен толықтығы ескеріледі.

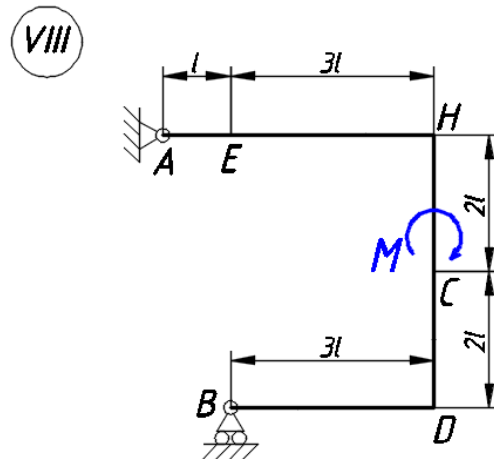
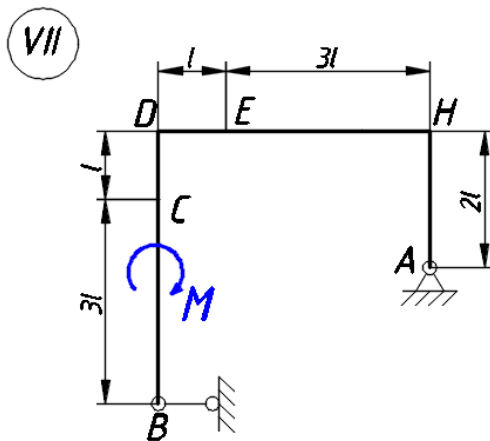
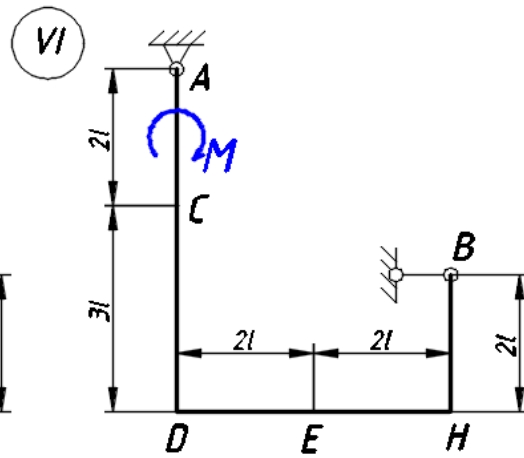
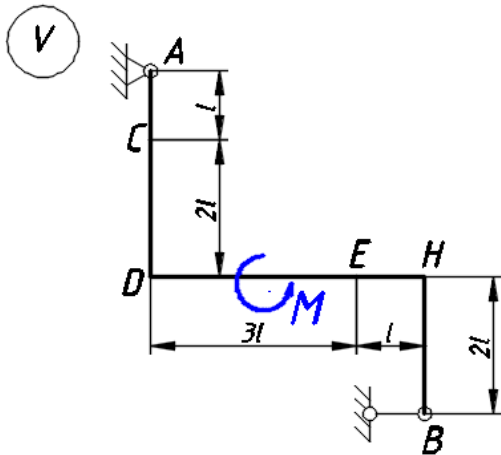
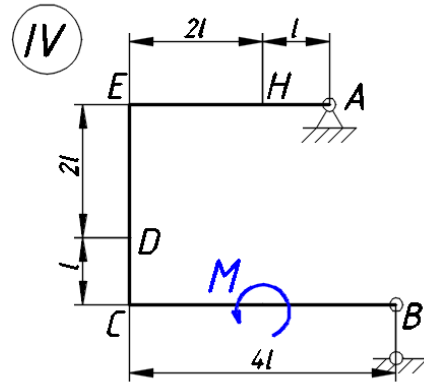
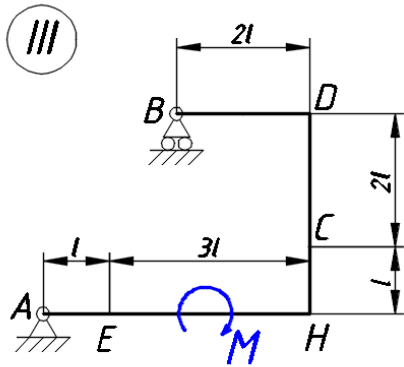
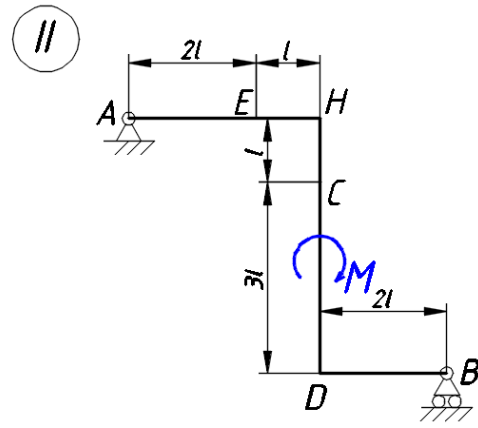
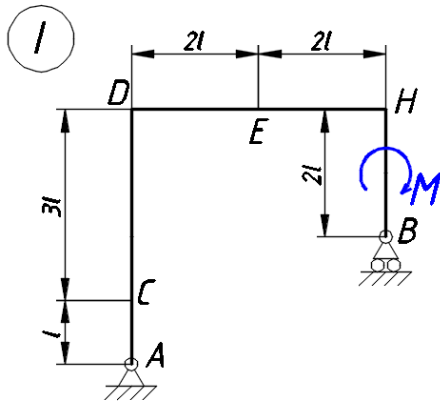
1 Есептік-сызба жұмысы №1. Статика

1.1 Жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігі

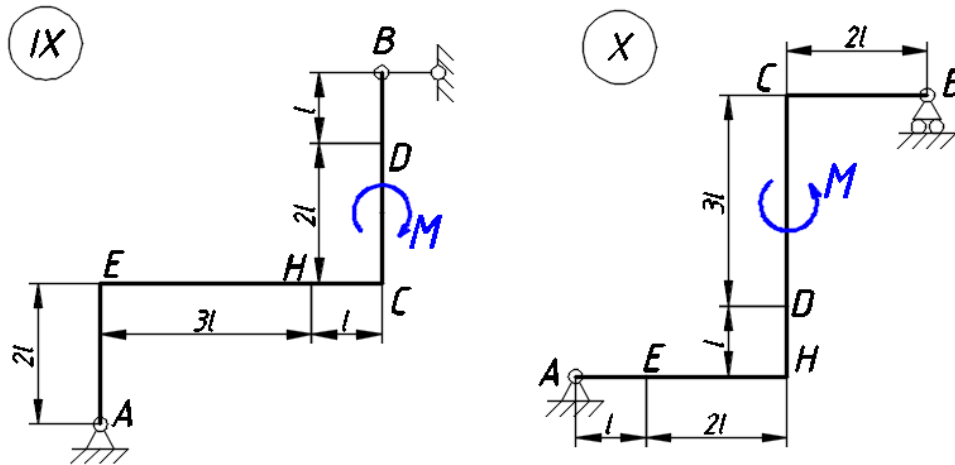
Сынық сырық түріндегі құрылым A нүктесінде жылжымайтын топсалы тірек және B нүктесінде жылжымалы топсалы тірек немесе салмағы ескерілмейтін, екі шетінде топсалары бар сырық арқылы бекітілген (1 сурет). Құрылымға моменті $M=100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ тең күштер жұбы, 1-кестеде түсірілу нүктесі, шамасы және горизонталь сызықпен жасайтын бұрышы берілген қадалған күш \vec{F} және 1-кестеде түсірілу аралығы, бағыты және q қарқындылығы берілген бірқалыпты таралған күштер әсер етеді. Егер α бұрышының шамасы оң болса, ол сағат тілінің жүрісіне қарсы бағытта, теріс болса – сағат тілінің жүрісіне бағыттас өлшенеді. Есептеуде $l=0,5 \text{ м}$ деп алу керек.

A және B нүктелеріндегі байланыстардың реакция күштерін анықтап, олар дұрыс табылғанын тексеру керек.

Нұсқаулар. Белгісіз реакция күштерін анықтау үшін денеге түсірілген жазық күштер жүйесі үшін үш тепе-теңдік теңдеу құру керек. Моменттер теңдеуін екі белгісіз реакция күші қиылысатын нүктеге қатысты жазған ынғайлы болады. \vec{F} күшінің моментін анықтағанда оны алдымен иіндері оңай табылатын \vec{F}' және \vec{F}'' құраушы күштерге жіктеп алып, Вариньон теоремасын қолданған жөн, сонда $M_o(\vec{F}) = M_o(\vec{F}') + M_o(\vec{F}'')$.



1 cyper



1 суреттің жалғасы

1 кесте – 1.1-тапсырмаға деректер

Жүктеме Нұсқа				Бірқалыпты таралған күштер		
	Түсу нүктесі	F, H	$\alpha, \text{град}$	Түсу аралығы	$q, H/м$	Бағыты
1	D	80	120	EH	200	Вертикаль төмен
2	H	120	-60	CD	300	Горизонталь сол жаққа
3	C	150	150	EH	200	Вертикаль төмен
4	E	70	-120	CD	400	Горизонталь оң жаққа
5	D	240	105	EH	300	Вертикаль төмен
6	H	160	-30	CD	200	Горизонталь сол жаққа
7	C	120	75	EH	400	Вертикаль төмен
8	E	150	-105	CD	200	Горизонталь сол жаққа
9	D	220	15	EH	300	Вертикаль төмен
10	E	180	-150	CD	400	Горизонталь оң жаққа

Орындау мысалы. Құрылым A нүктесінде жылжымайтын топсалы тірек және B нүктесінде шеттерінде топсалары бар салмақсыз сырық арқылы бекітілген (2 сурет). Ол H нүктесінде горизонтальмен $\alpha = -105^\circ$ бұрыш жасайтын \vec{F} күшімен, CD аралығында оң жаққа бағытталған, қарқындылығы

q -ға тең таралған күштермен және моменті M -ға тең күштер жұбымен жүктеліп тұр.

Берілгені: $F=150\text{ Н}$, $M=100\text{ Нм}$, $q=200\text{ Н/м}$, $l=0,5\text{ м}$.

Байланыстардың реакцияларын анықтау керек.

Шешімі. Құрылымның тепе-теңдігін қарастыру үшін оны байланыстардан ойша босатып, олардың әсерін реакция күштеріне алмастырамыз (3 сурет). A нүктедегі жылжымайтын топсалы тіректің реакциясы кез келген бағытта болуы мүмкін, сондықтан оны екі құраушы реакция күштеріне жіктеп аламыз: \bar{X}_A , \bar{Y}_A . B нүктедегі сырық созылу әсерінде деп болжамдап, оның \bar{R}_B реакциясын сырық бойымен құрылымнан тыс бағыттауымыз.

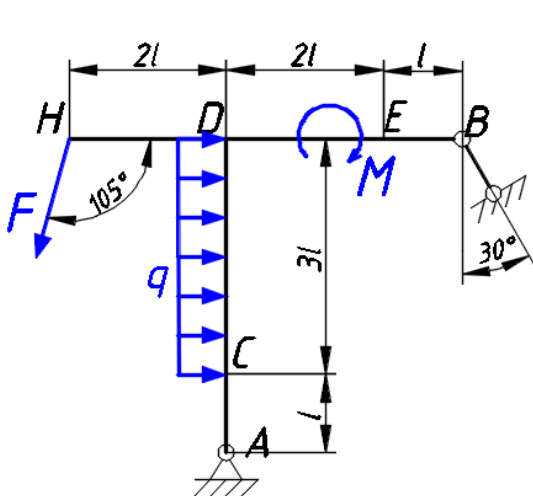
Бірқалыпты таралған күштерді олардың тең әсерлісі \bar{Q} күшіне алмастырамыз, оның модулі $Q=q \cdot 3l=200 \cdot 3 \cdot 0,5=300\text{ Н}$ және ол аралықтың ортасында әсер етеді. \bar{F} күшін горизонталь \bar{F}' және вертикаль \bar{F}'' құраушыларына жіктейміз, олардың модульдері:

$$F' = F \cos 75^\circ = 150 \cdot 0,259 = 38,9\text{ Н};$$

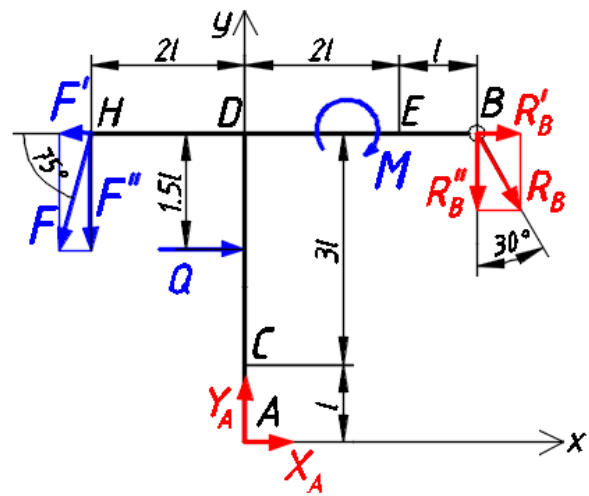
$$F'' = F \cos 15^\circ = 150 \cdot 0,966 = 144,9\text{ Н}.$$

\bar{R}_B реакция күшін \bar{R}'_B , \bar{R}''_B құраушыларына жіктейміз:

$$R'_B = R_B \cos 60^\circ, \quad R''_B = R_B \cos 30^\circ.$$



2 сурет



3 сурет

Құрылымға түсірілген жазық күштер жүйесі үшін тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз:

$$1) \sum F_{kx} = 0; \quad X_A + Q - F' + R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$2) \sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - F'' - R_B \cos 30^\circ = 0;$$

$$3) \sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -Q \cdot 2,5l + F'' \cdot 2l + F' \cdot 4l - M - R_B \cos 30^\circ \cdot 3l - R_B \cos 60^\circ \cdot 4l = 0.$$

3)-ші теңдеуден табамыз:

$$R_B = \frac{-Q \cdot 2,5l + F'' \cdot 2l + F' \cdot 4l - M}{\cos 30^\circ \cdot 3l + \cos 60^\circ \cdot 4l} =$$

$$= \frac{-300 \cdot 2,5 \cdot 0,5 + 144,9 \cdot 2 \cdot 0,5 + 38,9 \cdot 4 \cdot 0,5 - 100}{0,866 \cdot 3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 4 \cdot 0,5} = -109,7 \text{ Н}.$$

1)-ші теңдеуден:

$$X_A = -Q + F' - R_B \cos 60^\circ = -300 + 38,9 + 109,7 \cdot 0,5 = -206,3 \text{ Н}.$$

2)-ші теңдеуден:

$$Y_A = F'' + R_B \cos 30^\circ = 144,9 - 109,7 \cdot 0,866 = 49,9 \text{ Н}.$$

Есептің дұрыстығын тексеру үшін қосымша тепе-теңдік теңдеуді құрамыз:

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0; \quad X_A \cdot 4l - Y_A \cdot 3l + Q \cdot 1,5l + F'' \cdot 5l - M =$$

$$= -206,3 \cdot 4 \cdot 0,5 - 49,9 \cdot 3 \cdot 0,5 + 300 \cdot 1,5 \cdot 0,5 + 144,9 \cdot 5 \cdot 0,5 - 100 =$$

$$= -587,45 + 587,25 \approx 0.$$

Тепе-теңдік теңдеу орындалып тұр, яғни байланыстардың реакциялары дұрыс табылды.

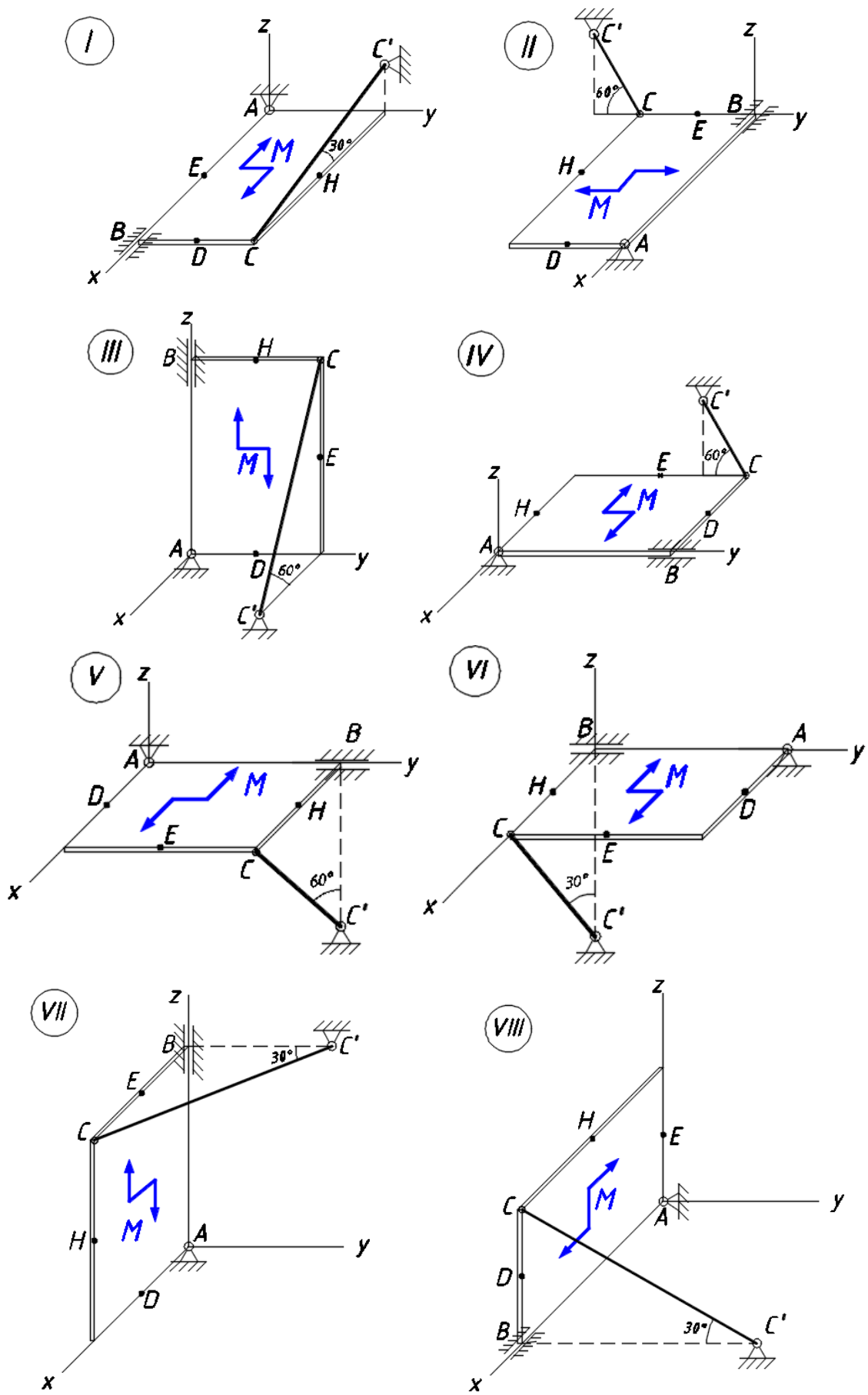
Жауабы: $X_A = -206,3 \text{ Н}$; $Y_A = 49,9 \text{ Н}$; $R_B = -109,7 \text{ Н}$ (\bar{X}_A және \bar{R}_B реакция күштерінің теріс таңбалары олардың шынайы бағыттары 3-суретте көрсетілген бағыттарға қарама қарсы екенін білдіреді).

1.2 Кеңістік күштер жүйесінің тепе-теңдігі

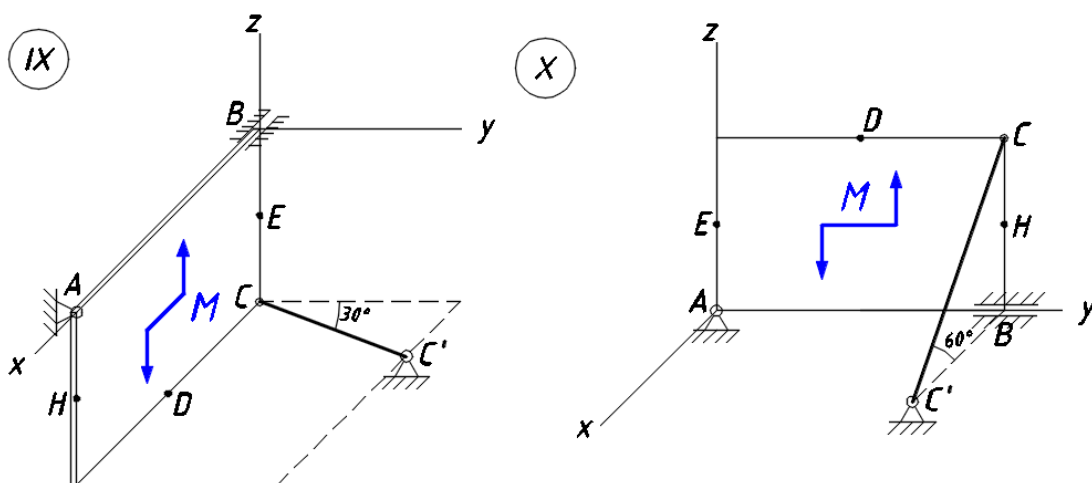
Біртекті тікбұрышты жұқа плитаның салмағы $P=5 \text{ кН}$ және қабырғалыры $AB=3l$, $BC=2l$. Плита A нүктесінде жылжымайтын сфералық топса, B нүктесінде цилиндрлік топса және C нүктесінде салмақсыз CC' сырық көмегімен бекітілген (4 сурет). Плита моменті $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ тең плита жазықтығында жатқан күштер жұбымен және 2-кестеде берілген екі күшпен жүктеліп тұр. Күштердің түсу нүктелері D , E , H сәйкес қабырғалардың орталарында орналасқан. Есептеуде $l=0,5 \text{ м}$ деп алу керек.

A , B және C нүктелердегі байланыстардың реакция күштерін анықтап, олар дұрыс табылғанын тексеру керек.

Нұсқаулар. Белгісіз реакция күштерін анықтау үшін денеге түсірілген кеңістік күштер жүйесі үшін 6 тепе-теңдік теңдеу құру керек. Координаттық осьтерге қатысты моменттер теңдеулерін жазғанда Вариньон теоремасын қолданған ыңғайлы болады. Мысалы \bar{F} күшін осьтерге параллель \bar{F}' және \bar{F}'' құраушы күштерге жіктеп алсақ, онда $M_x(\bar{F}) = M_x(\bar{F}') + M_x(\bar{F}'')$. CC' сырық реакциясын да екі құраушы күшке жіктеп, Вариньон теоремасын қолданған ыңғайлы.



4 cyper



4 суреттің жалғасы

2 кесте – 1.2-тапсырмаға деректер

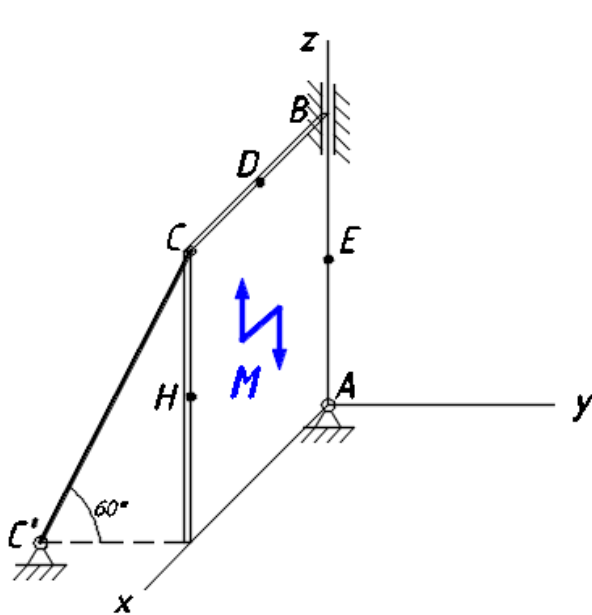
Күш	Z		y		z		y	
	$F_1 = 4 \text{ кН}$		$F_2 = 6 \text{ кН}$		$F_3 = 8 \text{ кН}$		$F_4 = 10 \text{ кН}$	
Нұсқа	Түсу нүктесі	$\alpha_1, \text{ град}$	Түсу нүктесі	$\alpha_2, \text{ град}$	Түсу нүктесі	$\alpha_3, \text{ град}$	Түсу нүктесі	$\alpha_4, \text{ град}$
1	E	0	-	-	D	15	-	-
2	-	-	H	60	-	-	D	0
3	D	30	-	-	-	-	E	90
4	-	-	E	0	H	75	-	-
5	H	0	D	30	-	-	-	-
6	-	-	-	-	E	90	H	30
7	D	60	-	-	H	0	-	-
8	-	-	E	90	-	-	D	15
9	H	15	-	-	-	-	E	0
10	-	-	D	75	H	90	-	-

Орындау мысалы. Плита A нүктесінде жылжымайтын сфералық топса, B нүктесінде цилиндрлік топса және салмақсыз CC' сырық көмегімен бекітілген (5 сурет). Плитаға оның \bar{P} салмағы, M моментімен күштер жұбы және бағыттары 2-кестеде көрсетілген E нүктесінде $\alpha_1=0$ бұрышымен \bar{F}_1 күші, D нүктесінде $\alpha_4=60^\circ$ бұрышымен \bar{F}_4 күші түсірілген.

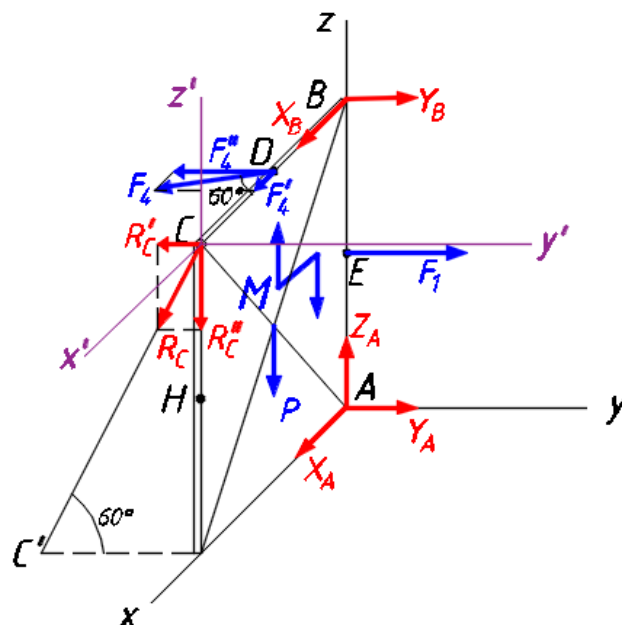
Берілгені: $P=5 \text{ кН}$, $M=6 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $F_1=4 \text{ кН}$, түсу түктесі E , $\alpha_1=0$, $F_4=10 \text{ кН}$, түсу түктесі D , $AB=3l$, $BC=2l$, $l=0,5 \text{ м}$.

A , B және C нүктелердегі байланыстардың реакцияларын анықтау керек.

Шешімі: Плитаға әсер ететін берілген күштерді көрсетеміз: плитаның ауырлық центрінде \bar{P} салмағын, E нүктесінде y өсіне параллель \bar{F}_1 күшін (өйткені оның y өсімен жасайтын бұрышы $\alpha_1=0$) және D нүктесінде x өсімен $\alpha_4=60^\circ$ жасайтын бұрышымен \bar{F}_4 күшін (6 сурет). Плитаның тепе-теңдігін қарастыру үшін оны байланыстардан ойша босатып, олардың әсерін реакция күштеріне алмастырамыз. A нүктедегі сфералық топсаның реакциясы кез келген бағытта болуы мүмкін, сондықтан оны үш құраушы реакция күштеріне жіктеп аламыз: $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$; B нүктедегі цилиндрлік топса z өсі бойымен қозғалуға мүмкіндік береді, сондықтан оның реакциясы екі құраушы реакция күштеріне жіктейміз: \bar{X}_B, \bar{Y}_B ; C нүктедегі сырық созылу әсерінде деп болжамдап, оның \bar{R}_C реакциясын сырық бойымен плитадан тыс бағыттауымыз.



5 сурет



6 сурет

\bar{F}_4 күшін \bar{F}'_4 және \bar{F}''_4 құраушыларына жіктейміз, олардың модульдері:

$$F'_4 = F_4 \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$F''_4 = F_4 \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

\bar{R}_C реакция күшін \bar{R}'_C, \bar{R}''_C құраушыларына жіктейміз:

$$R'_C = R_C \cos 60^\circ; \quad R''_C = R_C \cos 30^\circ.$$

Плитаға түсірілген кеңістік күштер жүйесі үшін 6 тепе-теңдік теңдеу құрамыз:

$$1) \quad \sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + F'_4 = 0;$$

$$2) \quad \sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - F''_4 - R'_C + F_1 = 0;$$

$$3) \quad \sum F_{kz} = 0; \quad Z_A - P - R''_C = 0;$$

$$5) \sum M_y(\bar{F}_k) = 0; X_B \cdot AB + P \cdot \frac{BC}{2} + R'_C \cdot BC - M + F'_4 \cdot AB = 0;$$

$$6) \sum M_z(\bar{F}_k) = 0; -F''_4 \cdot \frac{BC}{2} - R'_C \cdot BC = 0.$$

б)-шы теңдеуден табамыз:

$$R'_C = \frac{-F''_4 \cdot BC / 2}{BC} = -F''_4 \cdot \frac{1}{2} = -8,66 \cdot \frac{1}{2} = -4,33 \text{ кН}.$$

Сонда

$$R_C = \frac{R'_C}{\cos 60^\circ} = -\frac{4,33}{0,5} = -8,66 \text{ кН};$$

$$R''_C = R_C \cdot \cos 30^\circ = -8,66 \cdot 0,866 = -7,5 \text{ кН}.$$

Енді басқа теңдеулерді шеше аламыз.

$$4) \text{ -ден: } Y_B = \frac{(F''_4 - F_1 \cdot \frac{1}{2} + R'_C) \cdot AB}{AB} = 8,66 - \frac{4}{2} - 4,33 = 2,33 \text{ кН}.$$

5) -ден:

$$X_B = \frac{-P \cdot \frac{BC}{2} - R''_C \cdot BC + M - F'_4 \cdot AB}{AB} = \frac{-P \cdot l - R''_C \cdot 2l + M - F'_4 \cdot 3l}{3l} =$$

$$= \frac{-5 \cdot 0,5 + 7,5_C \cdot 2 \cdot 0,5 + 6 - 5_4 \cdot 3 \cdot 0,5}{3 \cdot 0,5} = 2,33 \text{ кН}.$$

$$1) \text{ -ден: } X_A = -X_B - F'_4 = -2,33 - 5 = -7,33 \text{ кН}.$$

$$2) \text{ -ден: } Y_A = -Y_B + F''_4 + R'_C - F_1 = -2,33 + 8,66 - 4,33 - 4 = -2 \text{ кН}.$$

$$3) \text{ -ден: } Z_A = P + R''_C = 5 - 7,5 = -2,5 \text{ кН}.$$

Есептің дұрыстығын тексеру үшін басын C нүктеде орналастырып $x'y'z'$ координат жүйесін аламыз және осы жаңа өстерге қатысты моменттер теңдеулерін құрып, олардың орындалуын тексереміз:

$$\sum M_{x'}(\bar{F}_k) = 0; F_1 \cdot \frac{AB}{2} + Y_A \cdot AB = AB \left(4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \right) = 0;$$

$$\sum M_{y'}(\bar{F}_k) = 0; Z_A \cdot BC - P \cdot \frac{BC}{2} - X_A \cdot AB - M =$$

$$= -2,5 \cdot 2 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,5 + 7,33 \cdot 3 \cdot 0,5 - 6 = 10,995 - 11 \approx 0;$$

$$\sum M_{z'}(\bar{F}_k) = 0; F''_4 \cdot \frac{BC}{2} - Y_B \cdot BC - F_1 \cdot BC - Y_A \cdot BC =$$

$$= BC \left(\frac{8,66}{2} - 2,33 - 4 + 2 \right) = 0.$$

Тепе-теңдік теңдеулер орындалып тұр, яғни байланыстардың реакциялары дұрыс табылды.

Жауабы: $X_A = -7,33 \text{ кН}$; $Y_A = -2 \text{ кН}$; $Z_A = -2,5 \text{ кН}$; $X_B = 2,33 \text{ кН}$; $Y_B = 2,33 \text{ кН}$; $R_C = -8,66 \text{ кН}$ (\bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A және \bar{R}_C реакцияларының теріс таңбалары олардың шынайы бағыттары б-суретте көрсетілген бағытқа қарама қарсы екенін білдіреді).

1.3 Бақылау сұрақтары

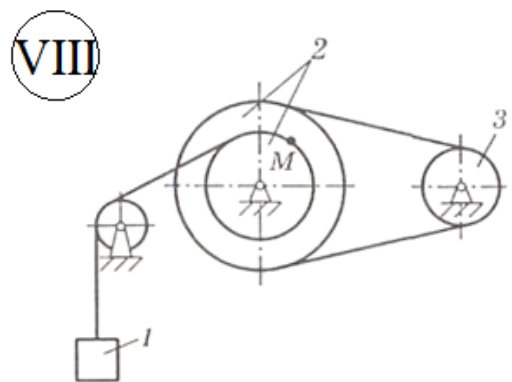
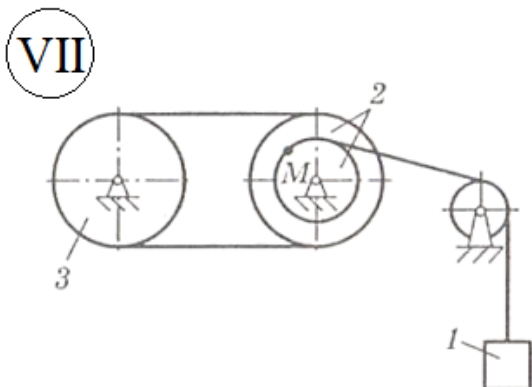
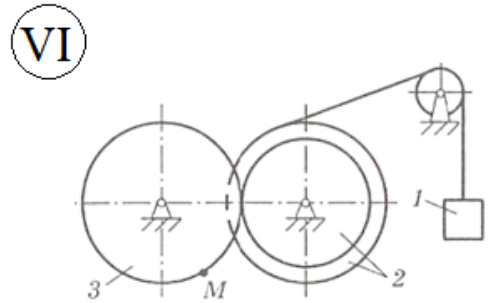
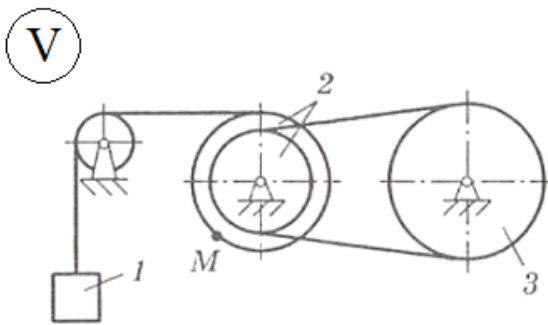
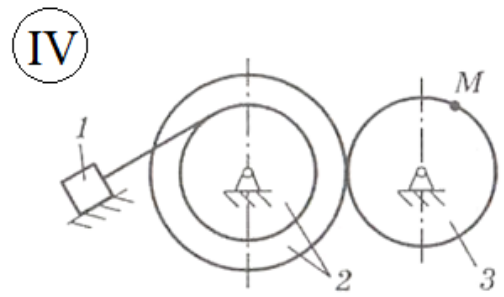
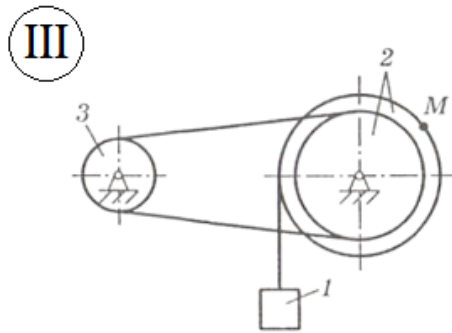
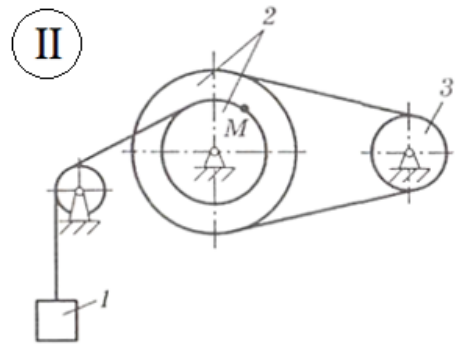
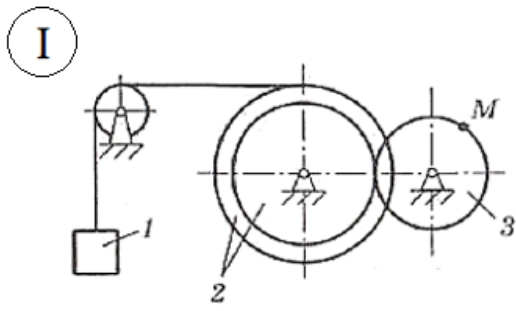
- 1) Байланыстардың түрлері және олардың реакциялары
- 2) Күштің нүктеге қатысты алгебралық моменті
- 3) Күштің оське қатысты алгебралық моменті
- 4) Вариньон теоремасы
- 5) Кез келген жазық күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттарының үш түрі
- 6) Кез келген кеңістік күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары

2 Есептік-сызба жұмысы №2. Кинематика

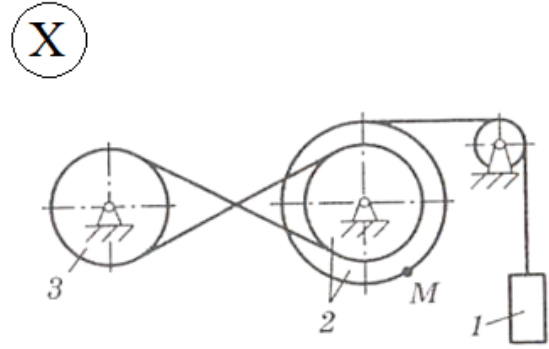
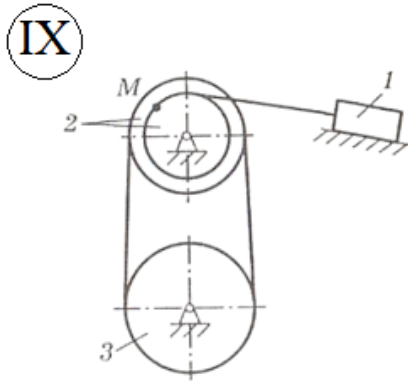
2.1 Қатты денелердің қарапайым қозғалыстарының түрлендірілуі

Механикалық жүйенің (7 сурет) 1-ші немесе 3-ші дененің қозғалыс теңдеуі берілген. Берілген $t=1 \text{ с}$ уақыт мезгілінде 2-ші және 3-ші дененің бұрыштық жылдамдықтары мен бұрыштық үдеуілерін, 1-ші дененің және M нүктесінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтап, оларды суретте көрсету керек. Доңғалақтардың радиустері және денелер біреуінің қозғалыс теңдеуі 3-ші кестеде келтірілген. Координата s_1 төмен қарай, айналу бұрышы φ_3 – сағат тілі жүрісіне қарсы бағытталған. Қозғалыс бір денеден басқа бір денеге жіп, белдік немесе доңғалақтардың ілінісі арқылы беріледі. Жіптер мен белдіктер созылмайды, доңғалақтар жанасу нүктелерінде және белдіктер доңғалақтар үстінде сырғанамайды.

Нұсқаулар. Алдымен қозғалыс теңдеуі берілген дененің кинематикалық параметрлерін анықтау керек: ілгерілемелі қозғалыстың s_1 теңдеуі берілген жағдайда – 1-ші дененің жылдамдығы мен үдеуін; айналмалы қозғалыстың φ_3 теңдеуі берілген жағдайда – 3-ші дененің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін. Кинематикалық параметрлерді уақыт t функциялары ретінде анықтап, $t=1 \text{ с}$ уақыт мезгілінде есептеу керек. Содан кейін алынған шамалардың таңбарына қарай барлық денелердің осы уақыт мезгіліндегі жылдамдықтары мен үдеулерінің бағыттарын көрсетеді. Сырғанау жоқ екенін пайдаланып, жіптің барлық нүктелерінің және белдіктің барлық нүктелерінің жылдамдықтары бірдей екенін ескере отырып, қалған денелердің кинематикалық параметрлерін табуға болады. Айналу қозғалысының формулдарын қолданып, доңғалақтың біреуінде орналасқан M нүктесінің жылдамдығы мен үдеуін анықтайды.



7 сурет



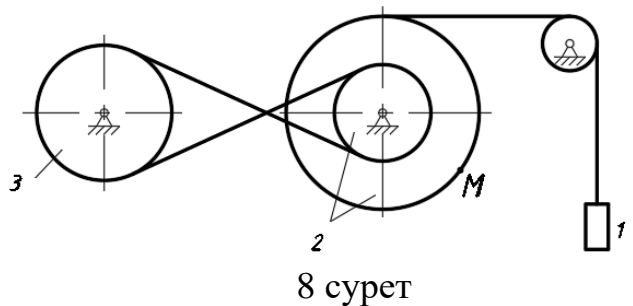
7 суреттің жалғасы

3 кесте – 2.1-тапсырмаға деректер

Нұсқа	$R_2, м$	$r_2, м$	$R_3, м$	Қозғалыс теңдеуі
1	0,5	0,25	0,3	$s_1=0,5t^2-0,8t (м)$
2	0,4	0,2	0,6	$\varphi_3= 2t^2-0,5t (рад)$
3	0,8	0,4	0,5	$s_1=0,4t^3+0,3t (м)$
4	0,7	0,35	0,4	$\varphi_3= 4t^2+0,5t (рад)$
5	0,6	0,3	0,2	$s_1=0,2t^3-3t (м)$
6	0,5	0,4	0,7	$\varphi_3= 2t^3+3t (рад)$
7	0,8	0,5	0,3	$s_1=0,4t^3+0,1t (м)$
8	0,4	0,3	0,6	$\varphi_3= 4t^3-5t (рад)$
9	0,7	0,4	0,2	$s_1=0,8t^3-2t (м)$
10	0,6	0,4	0,3	$\varphi_3= t^3-6t (рад)$

Орындау мысалы. Механизмнің сұлбасы 8-суретте көрсетілген, доңғалақтардың радиустері $R_2=0,8 м$, $r_2=0,5 м$, $R_3=0,4 м$, жүк 1-ң қозғалыс теңдеуі $s_1=0,5t^3-4t (м)$. Уақыт $t=1 с$ болғанда 2-ші мен 3-ші доңғалақтардың бұрыштық жылдамдықтары мен бұрыштық үдеулерін және 1-ші дене мен M нүктесінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтап, бағыттарын суретте көрсету керек.

Шешімі. Жүктің берілген қозғалыс теңдеуі бойынша оның жылдамдығы мен үдеуін анықтаймыз: $v_1 = \frac{ds_1}{dt} = 1,5t^2 - 4 (м/с)$, $a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 3t (м/с^2)$. Олардың мәндерін $t=1 с$ уақыт мезгінде есептейміз: $v_1=-2,5 м/с$, $a_1=3 м/с^2$. Жылдамдық пен үдеудің таңбалары әртүрлі болғандықтан, осы уақыт мезгілінде қозғалыс кемімелі екенін білеміз. Жүк жылдамдығының таңбасы теріс болып тұр, яғни оның бағыты s_1 бағытына қарсы болады. Жүк үдеуінің таңбасы оң, сонда ол s_1 бағытымен бірдей болады. Демек, 1-ші дене жоғары қарай кемімелі қозғалып тұр. Осыны ескере отырып,



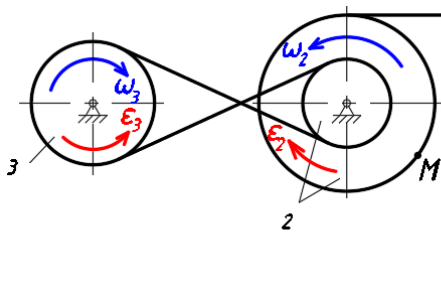
2-ші мен 3-ші доңғалақтардың бұрыштық жылдамдықтары мен бұрыштық үдеулерінің бағыттарын көрсетеміз (9 сурет).

Қозғалыс 1-ші денеден 2-ші денеге созылмайтын жіп арқылы беріледі, сондықтан жіптің барлық нүктелерінің жылдамдықтары бірдей және жүктің жылдамдығына тең. Жіп радиусы R_2 -ге тең 2-ші доңғалақтың бетіне оралған, сондықтан $v_1 = \omega_2 R_2$. Осыдан 2-ші доңғалақтың бұрыштық жылдамдығын

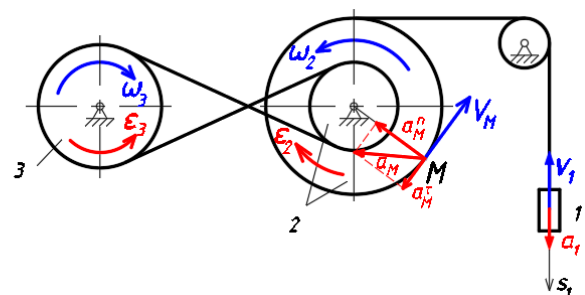
табамыз: $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{1,5t^2 - 4}{0,8} = 1,875t^2 - 5 \text{ (rad/c)}$. 2-ші доңғалақтың бұрыштық

үдеуі: $\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 1,875 \cdot 2t = 3,75t \text{ (rad/c}^2\text{)}$.

Уақыт $t=1 \text{ c}$ үшін аламыз: $\omega_2 = -3,125 \text{ rad/c}$, $\varepsilon_2 = 3,75 \text{ rad/c}^2$.



9 сурет



10 сурет

Қозғалыс 2-ші доңғалақтан 3-ші доңғалаққа созылмайтын белдік арқылы беріледі. Белдіктің барлық нүктелерінің жылдамдықтары бірдей екенін және белдік 2-ші доңғалақтың радиусы r_2 -ге тең беті үстінен өтетінін ескере отырып, мына формуланы жазамыз: $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Осыдан 3-ші доңғалақтың бұрыштық

жылдамдығын $t=1 \text{ c}$ үшін табамыз: $\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3} = \frac{3,125 \cdot 0,5}{0,4} = 3,91 \text{ rad/c}$. Мұнда

бұрыштық жылдамдықтардың шамалары модульмен алынған, өйткені олардың бағыттары белгілі. 3-ші доңғалақтың бұрыштық үдеуі:

$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_2 r_2}{R_3} \right) = \frac{\varepsilon_2 r_2}{R_3} = \frac{3,75 \cdot 0,5}{0,4} = 4,69 \text{ rad/c}^2$.

M нүктесі 2-ші доңғалақтың радиусы R_2 -ге тең бетінде орналасқан, сондықтан оның жылдамдығы $t=1 \text{ c}$ уақыт мезгілінде осыған тең: $v_M = \omega_2 R_2 = 3,125 \cdot 0,8 = 2,5 \text{ m/c}$.

M нүктесінің толық үдеуі екі құраушысының векторлық қосындысына тең: $\vec{a}_M = \vec{a}_M^\tau + \vec{a}_M^n$. Уақыт $t=1 \text{ c}$ үшін M нүктесінің жанама үдеуі (айналмалы үдеуі): $a_M^\tau = a_M^{\text{ain}} = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 3,75 \cdot 0,8 = 3 \text{ m/c}^2$, нормаль үдеуі (центрге тартқыш үдеуі): $a_M^n = a_M^{\text{um}} = \omega_2^2 \cdot R_2 = 3,125^2 \cdot 0,8 = 7,81 \text{ m/c}^2$.

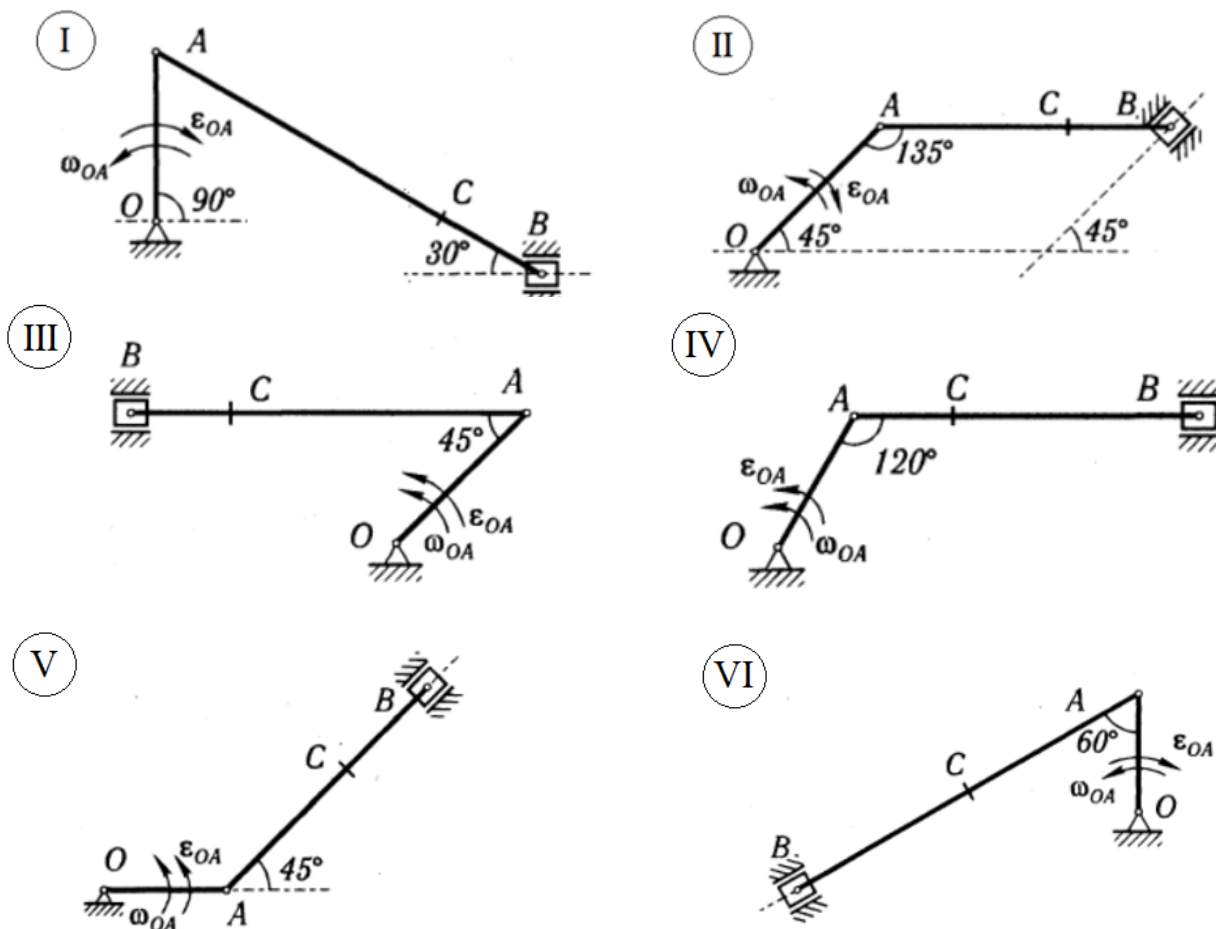
Сонда толық үдеудің шамасы: $a_M = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = 8,37 \text{ m/c}^2$. M нүктесінің жылдамдығы мен үдеулерінің векторлары 10-суретте көрсетілгендей бағытталады.

Жауабы: $t=1$ с уақыт мезгілінде кинематикалық параметрлердің шамаларының модульдері: $v_1=2,5$ м/с, $a_1=3$ м/с², $\omega_2 = 3,125$ рад/с, $\varepsilon_2 = 3,75$ рад/с², $\omega_3 = 3,91$ рад/с, $\varepsilon_3 = 4,69$ рад/с², $v_M = 2,5$ м/с, $a_M = 8,37$ м/с², олардың бағыттары 10-суретте көрсетілген.

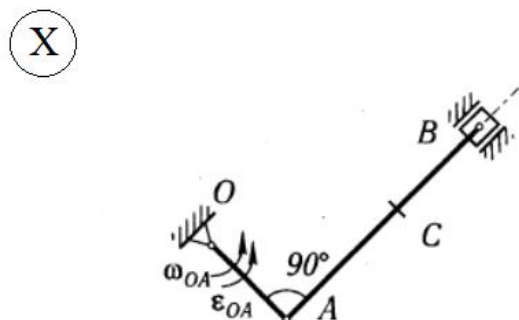
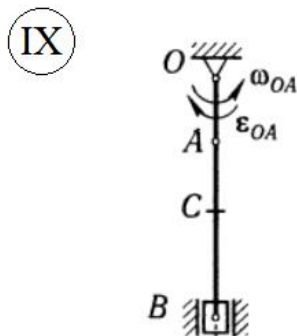
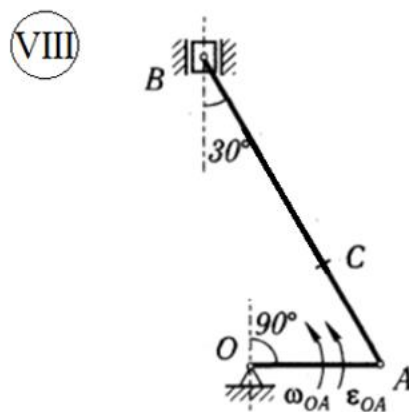
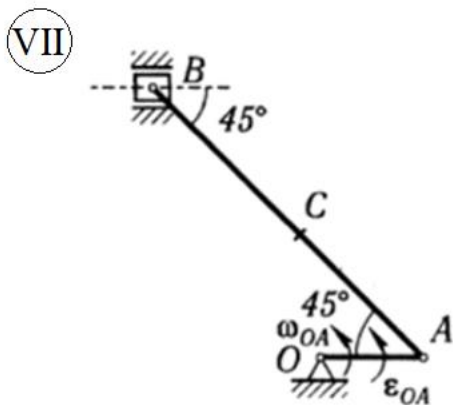
2.2 Жазық механизмді кинематикалық талдау

Механизмнің көрсетілген орналасуында оның A , B , C нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін және AB буынының бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін анықтау керек. OA буынының кинематикалық параметрлері және механизмнің өлшемдері 4-кестеде келтірілген.

Нұсқаулар. Тапсырма «Қатты дененің жазық параллель қозғалысы» тақырыбы бойынша орындалады. Алдымен айналмалы қосғалыстағы OA буынында орналасқан A нүктесінің жылдамдығы мен үдеуін анықтау керек. B сырғақ жылдамдығының бағыты белгілі болғандықтан, оның жылдамдығын жазық фигураның екі нүктесі жылдамдықтарының проекциялары туралы теореманы қолдануға ыңғайлы. C нүктесінің жылдамдығы мен AB буынының бұрыштық жылдамдығын осы буынның лездік жылдамдықтар центрі (ЛЖЦ) көмегімен анықтауға болады. B нүктесінің үдеуі мен AB буынының бұрыштық үдеуін жазық фигура нүктелерінің үдеулері туралы теореманы қолдану керек. Содан кейін осы теореманы қолданумен C нүктесінің үдеуін анықтайды.



11 сурет



11 суреттің жалғасы

4 кесте – 2.2-тапсырмаға деректер

Нұсқа	$\omega_{OA}, \text{рад/с}$	$\varepsilon_{OA}, \text{рад/с}^2$	$OA, \text{м}$	$AB, \text{м}$	$AC, \text{м}$
1	1	2	0,30	0,80	0,50
2	1	3	0,20	0,60	0,40
3	2	2	0,40	0,90	0,30
4	2	3	0,50	0,11	0,70
5	2	4	0,30	0,90	0,40
6	1	4	0,20	0,70	0,40
7	3	2	0,40	1,00	0,50
8	3	1	0,50	1,20	0,70
9	3	4	0,30	0,70	0,40
10	4	5	0,40	0,80	0,50

Орындау мысалы. Механизмнің сұлбасы (12 сурет) және келесі деректер берілген: $\omega_{OA}=1 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA}=2 \text{ рад/с}^2$, $OA=0,4 \text{ м}$, $AB=0,7 \text{ м}$, $AC=0,3 \text{ м}$. Нүктелер A, B, C мен AB буынның кинематикалық параметрлерін анықтау керек.

Шешімі. Механизм үш буыннан құрылған: буын OA (айналшақ) O нүктеден өтетін тұрақты ось төңірегінде айналады, бұлғақ AB жазық параллель қозғалысты жасайды, сырғақ B вертикаль бағыттаушы бойымен ілгерілемелі қозғалады.

OA айналшақтың бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеулерінің бағыттары бірдей, демек, айналшақтың және барлық механизмнің қозғалысы үдемелі болып келеді.

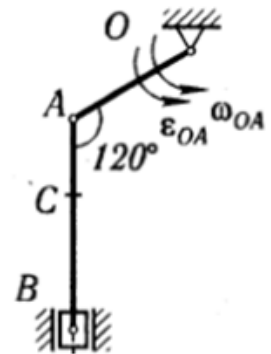
Алдымен айналмалы қозғалыс формулаларымен A нүктесінің жылдамдығы мен үдеуін анықтаймыз:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ м/с},$$

$$a_A^{a\ddot{u}n} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^{um} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1^2 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^{a\ddot{u}n})^2 + (a_A^{um})^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,4^2} = 0,894 \text{ м/с}^2.$$

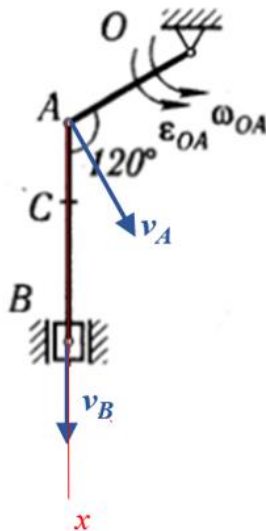


12 сурет

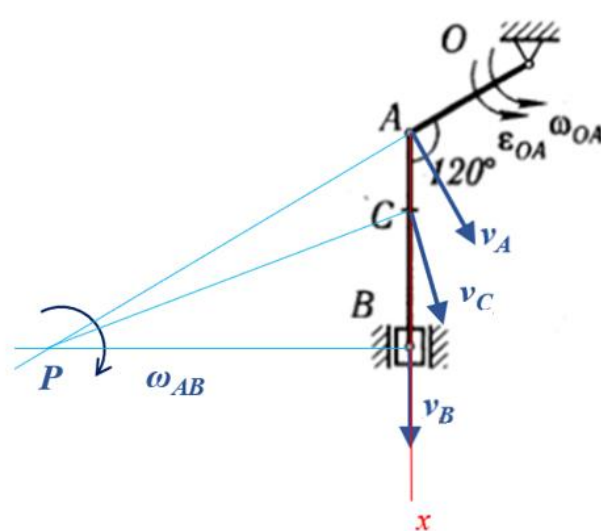
A нүктесінің жылдамдық векторы OA буынына перпендикуляр және ω_{OA} бұрыштық жылдамдығына сәйкес бағытталады. Онда B нүктесінің жылдамдығы вертикаль төмен бағытталады (13 сурет). A және B нүктелерінен x осін жүргізіп, жазық фигураның екі нүктесі жылдамдықтарының проекциялары туралы теореманы қолданамыз:

$$v_{Bx} = v_{Ax} \Rightarrow v_B = v_A \cdot \cos 30^\circ = 0,4 \cdot 0,866 = 0,346 \text{ м/с}.$$

C нүктесінің жылдамдығын және AB буынның бұрыштық жылдамдығын анықтау үшін, A және B нүктелерінің жылдамдықтарына перпендикулярларды тұрғызып, олардың қиылысуында AB буынның ЛЖЦ табамыз (14 сурет).



13 сурет



14 сурет

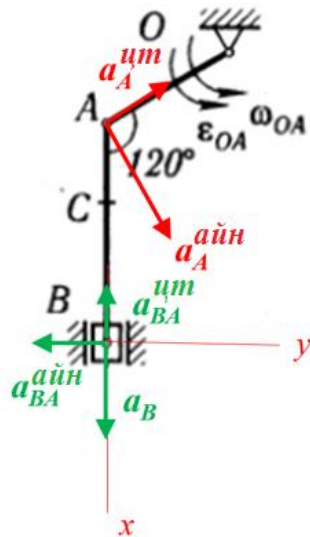
AB буыны ЛЖЦ төңірегінде лездік айналу жасайды деп, буынның бұрыштық жылдамдығын анықтаймыз $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{2AB} = \frac{0,4}{2 \cdot 0,7} = 0,286 \text{ рад/с}$

және оның айналу бағытын сағат тілі жүрісіне бағытас көрсетеміз. Әрі қарай C нүктесінің жылдамдығын мына формуламен табамыз: $v_C = \omega_{AB} \cdot PC$, мұндағы PC қашықтығы $\triangle CBP$ тікбұрышты үшбұрыштан табылады:

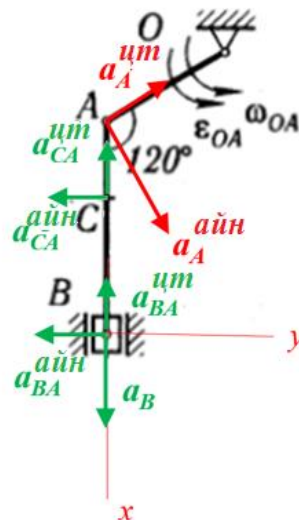
$$PC = \sqrt{BP^2 + BC^2} = \sqrt{(AB \operatorname{tg} 60^\circ)^2 + BC^2} = \sqrt{(0,7 \cdot \sqrt{3})^2 + 0,4^2} = 1,27 \text{ м.} \quad \text{Сонда}$$

$$v_C = 0,286 \cdot 1,27 = 0,363 \text{ м/с.}$$

Үдеуі белгілі A нүктесін полюс ретінде қабылдап, B нүктесінің үдеуін жазық фигура нүктелерінің үдеулері туралы теореманы қолданумен анықтаймыз: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{aйн} + \vec{a}_{BA}^{ум} = \vec{a}_A^{aйн} + \vec{a}_A^{ум} + \vec{a}_{BA}^{aйн} + \vec{a}_{BA}^{ум}$. Мұндағы $\vec{a}_A^{aйн}$ - A нүктесінің айналмалы үдеуі, ол OA -ға перпендикуляр және ε_{OA} бұрыштық үдеудің бағытына сәйкес бағытталады; $\vec{a}_A^{ум}$ - A нүктесінің центрге тартқыш үдеуі, ол A нүктесінен O айналу центріне қарай бағытталады; \vec{a}_{BA}^{uc} - B нүктесінің A полюсін айналуындағы центрге тартқыш үдеуі, ол B нүктесінен A полюске қарай бағытталады және мына формуламен анықталады: $a_{BA}^{uc} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,286^2 \cdot 0,7 = 0,057 \text{ м/с}^2$; $\vec{a}_{BA}^{aйн}$ - B нүктесінің A полюсін айналуындағы айналмалы үдеуі, ол AB -ға перпендикуляр және механизм қозғалысы үдемелі болғандықтан буынның ω_{AB} бұрыштық жылдамдығына сәйкес бағытталады. Үдеудің формуласы $a_{BA}^{aйн} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$, мұндағы AB буынының бұрыштық үдеуі ε_{AB} белгісіз. B нүктесінің үдеуі \vec{a}_B оның жылдамдығының бағытына сәйкес вертикаль төмен бағытталады.



15 сурет



16 сурет

Үдеулер векторларын және осьтерді көрсетіп (15 сурет), векторлық теңдеуді x және y осьтеріне проекциялаймыз:

$$a_B = a_A^{aйн} \cos 30^\circ - a_A^{ум} \cos 60^\circ - a_{BA}^{ум} = 0,8 \cdot 0,866 - 0,4 \cdot 0,5 - 0,057 = 0,436 \text{ м/с}^2,$$

$$0 = a_A^{aйн} \cos 60^\circ + a_A^{ум} \cos 30^\circ - a_{BA}^{aйн}.$$

Екінші теңдеуден алдымен B нүктесінің A полюсін айналуындағы айналмалы үдеуін, содан кейін AB буынының бұрыштық үдеуін анықтаймыз:

$$a_{BA}^{ep} = a_A^{ep} \cos 60^\circ + a_A^{uc} \cos 30^\circ = 0,8 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,866 = 0,746 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{BA}^{ep} = \varepsilon_{AB} \cdot AB \Rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{ep}}{AB} = \frac{0,746}{0,7} = 1,07 \text{ рад/с}^2.$$

C нүктесінің үдеуін жазық фигура нүктелерінің үдеулері туралы теореманы қолданумен анықтаймыз: $\bar{a}_C = \bar{a}_A^{ain} + \bar{a}_A^{um} + \bar{a}_{CA}^{ain} + \bar{a}_{CA}^{um}$. Мұнда C нүктесі үдеуінің бағыты алдын ала белгісіз, ал оның A полюсін айналуындағы айналмалы және центрге тартқыш үдеулері B нүктесінің сәйкес үдеулерімен бірдей бағытта болады (16 сурет). Олардың шамаларын есептейміз: $a_{CA}^{ain} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 1,07 \cdot 0,3 = 0,321 \text{ м/с}^2$, $a_{CA}^{um} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0,286^2 \cdot 0,3 = 0,025 \text{ м/с}^2$.

C нүктесінің үдеуі үшін жазылған векторлық теңдеуді координаттық осьтерге проекциялаймыз:

$$a_{Cx} = a_A^{ain} \cos 30^\circ - a_A^{um} \cos 60^\circ - a_{CA}^{um} = 0,8 \cdot 0,866 - 0,4 \cdot 0,5 - 0,025 = 0,468 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = a_A^{ain} \cos 60^\circ + a_A^{um} \cos 30^\circ - a_{CA}^{ain} = 0,8 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,866 - 0,321 = 0,425 \text{ м/с}^2.$$

Осыдан C нүктесінің үдеуі табылады:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{0,468^2 + 0,425^2} = 0,632 \text{ м/с}^2.$$

Жауабы: $v_A = 0,4 \text{ м/с}$, $a_A = 0,894 \text{ м/с}^2$, $v_B = 0,346 \text{ м/с}$, $a_B = 0,436 \text{ м/с}^2$, $v_C = 0,363 \text{ м/с}$, $a_C = 0,632 \text{ м/с}^2$, $\omega_{AB} = 0,286 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{AB} = 1,07 \text{ рад/с}^2$.

2.3 Бақылау сұрақтары

- 1) Ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстар туралы түсінік
- 2) Дененің тұрақты ось төңірегінде айналу кезіндегі бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуі
- 3) Дене нүктелерінің айналмалы қозғалыс кезіндегі жылдамдықтары мен үдеулері
- 4) Дене нүктелерінің жазық параллель қозғалыс кезіндегі жылдамдықтары мен үдеулері
- 5) Жазық фигураның екі нүктесі жылдамдықтарының проекциялары туралы теорема
- 6) ЛЖЦ орнын анықтау тәсілдері

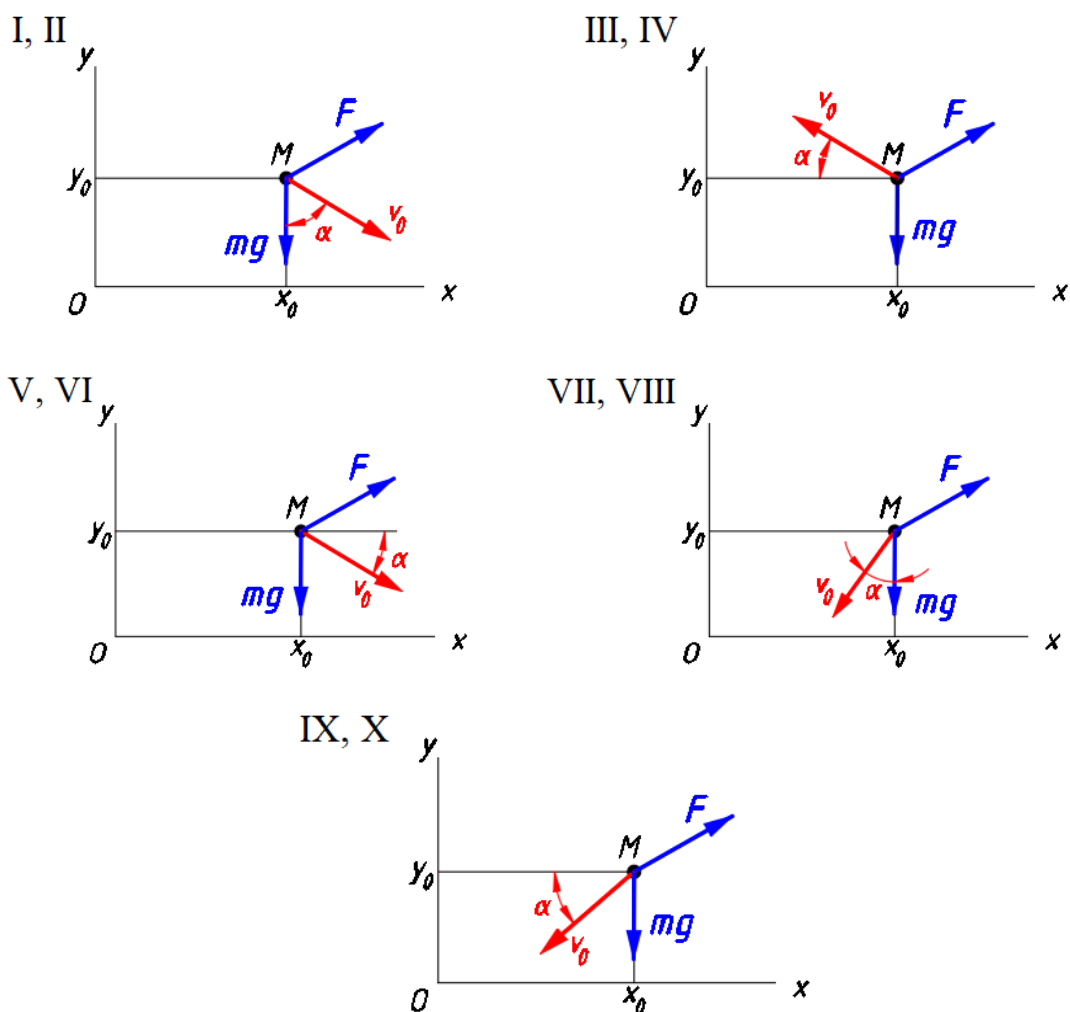
3 Есептік-сызба жұмысы №3. Динамика

3.1 Нүкте динамикасы

Ауырлық күші және айнымалы \bar{F} күші әсерінен массасы m болатын материалдық M нүктесінің берілген бастапқы шарттардағы қозғалысының теңдеулерін табу керек. \bar{F} күшінің координаттық осьтерге F_x, F_y проекциялары t уақыттың, x, y координаталардың және жылдамдықтың v_x, v_y проекцияларының функциялары болуы мүмкін. Бастапқы деректер 5 кестеде берілген.

Нұсқаулар. Алдымен материалдық нүкте үшін координаттық x, y осьтеріне проекцияланған қозғалыс теңдеулері құрылады, әрі қарай әр теңдеу бөлек шешіледі. Берілген күштің проекциясы t уақыттың функциясы болса, қозғалыс теңдеуі уақыт бойынша интегралдау арқылы шешіледі. Күштің проекциясы x (немесе y) координатаның немесе жылдамдықтың v_x (немесе v_y) проекциясының функциясы болса, онда тұрақты еселіктермен біртекті немесе біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу шығады. Біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу үшін, сәйкес сипаттамалық

теңдеуді құрып, оның түбірлерін табу керек. Біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі оның дербес шешімі мен сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімінің қосындысына тең. Интегралдау тұрақтыларын анықтау үшін қозғалыстың бастапқы шарттарын қолдану керек.



17 сурет

5 кесте – 3.1-тапсырмаға деректер

Нұсқа	$m, \text{кг}$	$x_0, \text{м}$	$y_0, \text{м}$	$v_0, \text{м/с}$	$\alpha, ^\circ$	$F_x, \text{Н}$	$F_y, \text{Н}$
1	0,4	2	0	5	25	$4x$	$2,4t^2+2$
2	0,5	0	1	2	30	$4\cos(\pi t)$	$-0,2v_y$
3	0,1	0	-3	4	50	$1,2t^2+0,4$	$0,5y$
4	2,0	-1	0	2	15	$-0,5v_x$	$6\sin(\pi t)$
5	0,4	-2	2	3	30	$4,8t^3-4t$	$-0,4y$
6	0,5	0	3	1	45	$-4x$	$2\cos(2\pi t)$
7	0,2	0	-2	5	30	$6\sin(3\pi t)$	$-0,1v_y$
8	0,1	1	-2	2	25	$-2x$	$0,6t^2-0,2$
9	0,5	3	0	3	40	$3x$	$1,2t^3+2t$
10	2,0	2	0	6	50	$8\sin(2\pi t)$	$-0,4v_y$

Орындау мысалы. Материалдық нүктенің массасы $m=0,4$ кг (18 сурет), бастапқы координаталары $x_0=1$ м, $y_0=2$ м, бастапқы жылдамдық $v_0=3$ м/с, бұрыш $\alpha=20^\circ$, \vec{F} күшінің проекциялары $F_x=-6\sin(\pi t/2)$, $F_y=3,6y$ (ньютонмен).

Шешімі. Материалдық нүкте қозғалысының теңдеуін координаттық осьтерге проекциялап, күш проекцияларының өрнектерін қоямыз: $ma_x = F_x$, $ma_y = F_y - mg \Rightarrow ma_x = -6\sin(\pi t/2)$, $ma_y = 3,6y - mg$. Теңдеулерді массаға бөлгеннен кейін үдеудің проекцияларының өрнектерін аламыз: $a_x = -15\sin(\pi t/2)$, $a_y = 9y - 9,8$. Әрі қарай теңдеулерді бөлек қарастырып шешеміз.

Бірінші теңдеу осындай: $a_x = 15\sin(\pi t/2)$. Оны екі рет уақыт бойынша интегралдап аламыз:

$$v_x = \int a_x dt = -15 \int \sin(\pi t/2) dt = \frac{15}{\pi/2} \cos(\pi t/2) + C_1,$$

$$x = \int v_x dt = -\frac{15}{(\pi/2)^2} \sin(\pi t/2) + C_1 t + C_2.$$

Демек, жылдамдықтың v_x проекциясы мен x координата үшін мына өрнектер табылды:

$$v_x = 9,55 \cos(\pi t/2) + C_1, \quad x = -6,09 \sin(\pi t/2) + C_1 t + C_2.$$

Интегралдау тұрақтыларын табу үшін қозғалыстың бастапқы шарттарын жазамыз: $t=0$ болғанда $v_x=v_{0x}=-v_0 \cos \alpha$, $x=x_0$. Бастапқы шарттарды v_x пен x өрнектеріне қойып, аламыз: $-v_0 \cos \alpha_0 = 9,55 + C_1$, $x_0 = C_2$. Осыдан интегралдау тұрақтыларын анықтаймыз:

$$C_1 = 9,55 + v_0 \cos \alpha_0 = 9,55 + 3 \cos 20^\circ = 12,37 \text{ м/с}, \quad C_2 = x_0 = 1 \text{ м}.$$

Сонымен, материалдық нүктенің x осі бойымен қозғалыс теңдеуі осы түрде жазылады: $x = -6,09 \sin(\pi t/2) + 12,37t + 1$ (м).

Жоғарыда үдеудің y оське проекциясы табылды: $a_y = 9y - 9,8$. Мұнда $a_y = \ddot{y}$ екенін ескере отырып, осындай теңдеуге келеміз: $\ddot{y} - 9y = -9,8$. Бұл біртекті емес тұрақты еселіктермен сызықты дифференциалдық теңдеу.

Біртекті емес дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі оның дербес шешімі мен сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімінің қосындысына тең: $y = y_{\text{дер}} + y_{\text{б.жс}}$. Теңдеудің оң жағында сан болғандықтан, дербес шешімді сан түрде іздеп көреміз, яғни $y_{\text{дер}} = A$. Осыны дифференциалдық теңдеуге қойып, аламыз: $-9A = -9,8 \Rightarrow A = 1,09$. Дербес шешім осындай шықты: $y_{\text{дер}} = 1,09$ м.

Сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеу мына түрде жазылады: $\ddot{y} - 9y = 0$. Ол үшін сипаттамалық теңдеуді құрып, түбірлерін табамыз: $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Сонда біртекті теңдеудің жалпы шешімі осындай болады: $y = C_3 e^{3t} + C_4 e^{-3t}$. Жылдамдықтың проекциясы үшін өрнекті жазамыз: $v_y = \dot{y} = 3C_3 e^{3t} - 3C_4 e^{-3t}$. Қозғалыстың y осі бойынша бастапқы шарттары осындай: $t=0$ болғанда $v_y=v_{0y}=-v_0 \sin \alpha$, $y=y_0$. Бастапқы шарттарды v_y пен y

өрнектеріне қойып, аламыз: $-v_0 \sin \alpha = 3C_3 - 3C_4$, $y_0 = C_3 + C_4$. Алынған теңдеулер жүйесін шешеміз:

$$\begin{cases} -v_0 \sin \alpha = 3C_3 - 3C_4, \\ y_0 = C_3 + C_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -v_0 \sin \alpha = 3C_3 - 3C_4, \\ 3y_0 = 3C_3 + 3C_4. \end{cases} \Rightarrow -v_0 \sin \alpha + 3y_0 = 6C_3,$$

$$C_3 = \frac{3y_0 - v_0 \sin \alpha}{6} = \frac{3 \cdot 2 - 3 \sin 20^\circ}{6} = 0,829 \text{ м},$$

$$C_4 = y_0 - C_3 = 2 - 0,829 = 1,171 \text{ м}.$$

Біртекті теңдеудің жалпы шешімі: $y_{\text{б.ж.}} = 0,829e^{3t} + 1,171e^{-3t}$.

Сонымен, материалдық нүктенің y осі бойымен қозғалыс теңдеуі осындай болады: $y = 1,09 + 0,829e^{3t} + 1,171e^{-3t} \text{ (м)}$.

Жауабы:

$$x = -6,09 \sin(\pi t / 2) + 12,37t + 1 \text{ (м)},$$

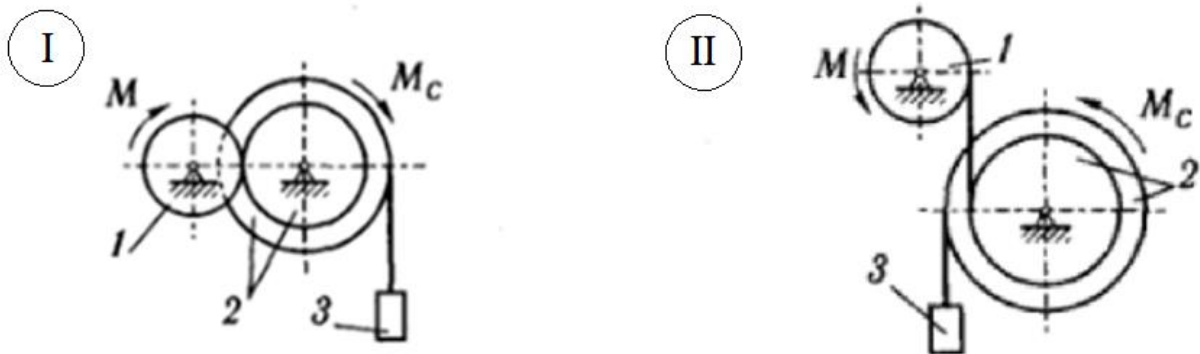
$$y = 1,09 + 0,829e^{3t} + 1,171e^{-3t} \text{ (м)}.$$

3.2 Жүйе динамикасы

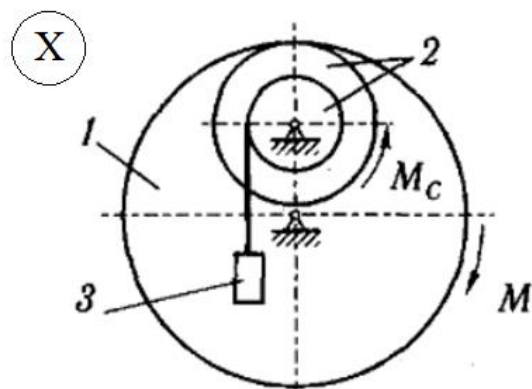
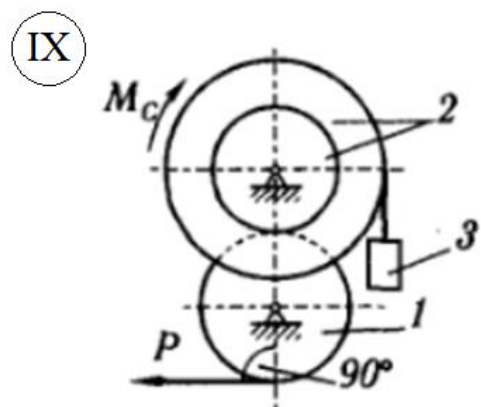
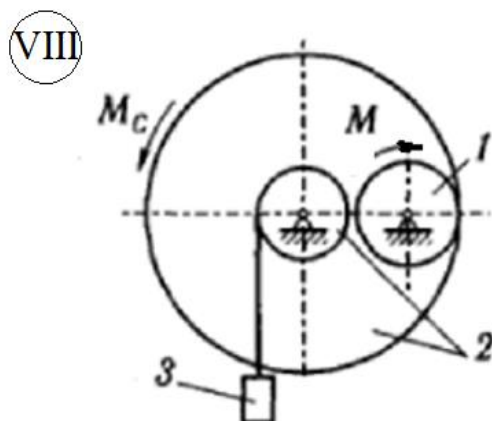
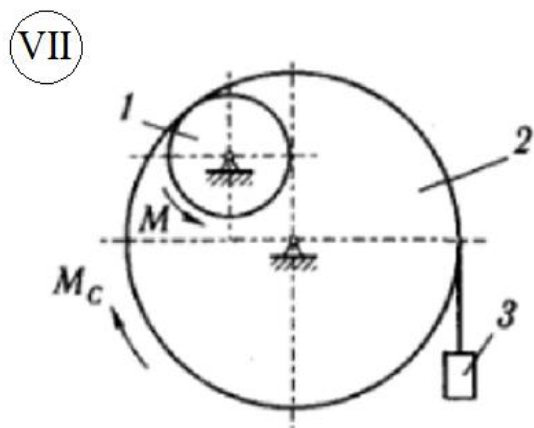
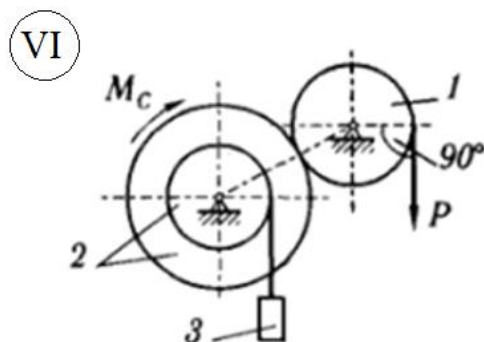
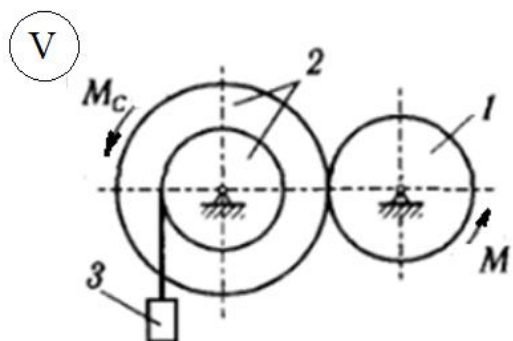
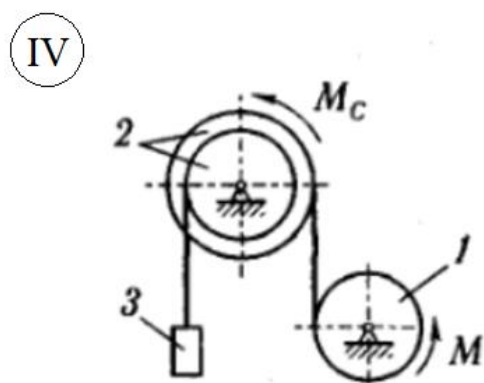
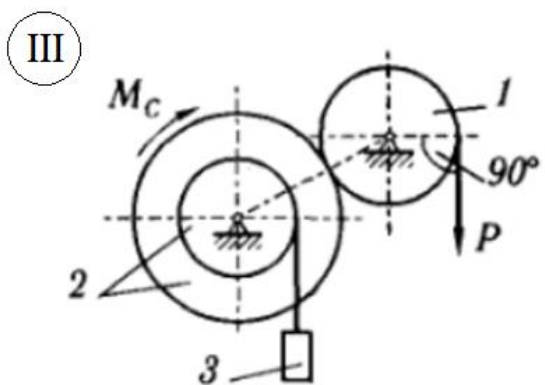
Механикалық жүйе екі доңғалақ пен жүктен тұрады (19 сурет). 1-ші доңғалақ тұрақты M моментімен күштер жұбы (қозғаушы момент) әсерінен немесе P күш (қозғаушы күш) әсерінен қозғалысқа келіп, жүйенің басқа денелерін қозғалтады. 2-ші доңғалаққа M_c кедергі моменті әсер етеді. Денелердің массалары, доңғалақтардың радиустері, олардың айналу осьтеріне қатысты инерция радиустері, қозғаушы күш, қозғаушы момент пен кедергі моменттің мәндері б кестеде келтірілген.

1-ші доңғалақтың бұрыштық үдеуін анықтау керек.

Нұсқаулар. Тапсырма «Ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстардың теңдеулері» тақырыбы бойынша орындалады. Есепті шешу үшін әр дененің қозғалысын бөлек қарастырып, әсер ететін ауырлық күштерді, берілген күштер мен моменттерді, тіректердің реакция күштерін және денелердің өзара әсер ету күштерін көрсету керек. Әр дене қозғалысының теңдеуін құрып, теңдеулер жүйесін алады. Оны шешу үшін кинематикалық қатынастарды қолдану керек.



19 сурет

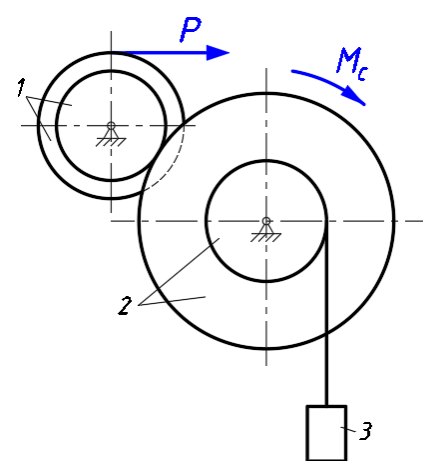


19 суреттің жалғасы

6 кесте – 3.2-тапсырмаға деректер

Нұсқа	$m_1,$ кг	$m_2,$ кг	$m_3,$ кг	$R_1,$ м	$R_2,$ м	$r_2,$ м	$i_{1z},$ м	$i_{2z},$ м	$M,$ Нм	$P,$ Н	$M_c,$ Нм
1	100	200	300	0,3	0,6	0,4	0,3	0,5	1500	4000	800
2	200	100	400	0,2	0,8	0,5	0,2	0,6	2000	4500	600
3	150	200	500	0,4	0,8	0,4	0,4	0,6	3000	5000	700
4	200	150	400	0,5	1,0	0,6	0,5	0,8	2000	4000	500
5	50	100	300	0,2	0,6	0,3	0,2	0,5	1500	3000	600
6	100	250	400	0,4	0,8	0,5	0,4	0,6	3500	5000	700
7	200	100	500	0,3	0,6	0,2	0,3	0,4	2000	6000	400
8	150	100	400	0,4	0,8	0,4	0,4	0,6	3000	5000	600
9	200	100	300	0,5	1,0	0,5	0,5	0,8	1500	4000	500
10	50	100	300	0,2	0,6	0,4	0,2	0,5	2000	3000	400

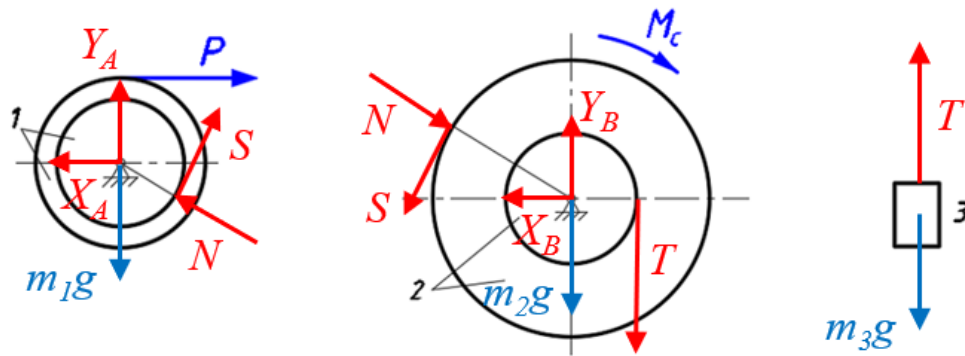
Орындау мысалы. Механикалық жүйе берілген (20 сурет), денелердің массалары $m_1=100$ кг, $m_2=150$ кг, $m_3=400$ кг, доңғалақтардың сыртқы және ішкі радиустері $R_1=0,8$ м, $r_1=0,6$ м, $R_2=1,2$ м, $r_2=0,6$ м, доңғалақтардың айналу осьтеріне атысты инерция радиустері $i_{1z}=0,7$ м, $i_{2z}=0,8$ м, қозғаушы күш $P=3000$ Н, 2-ші доңғалақтағы кедергі момент $M_c=400$ Нм. 1-ші доңғалақтың ε_1 бұрыштық үдеуін табу керек.



20 сурет

Шешімі. Берілген механикалық жүйедегі доңғалақтар 1 мен 2 тұрақты осьтер төңірегінде айналады, ал жүк 3 ілгерілемелі қозғалады. Әр дененің қозғалысын бөлек қарастырып, оларға түсірілген күштер мен моменттерді көрсетеміз, сол кезде денелердің өзара әрекеттесу күштерінің модульдері тең және қарама қарсы бағытталатынын ескереміз (21 сурет).

Доңғалақ 1 қозғаушы \vec{P} күші әсерінен сағат тілі жүрісіне бағытталса айналады, жанасу нүктесіндегі 2-ші доңғалақтың реакциясы екі құраушыдан тұрады: доңғалақтар беттерінің ортақ нормалі бойымен (радиус бойымен) 2-ші доңғалақтан 1-ші доңғалаққа қарай бағытталған нормаль \vec{N} реакциядан және доңғалақ шеңберіне жанама, айналуға қарсы бағытталған \vec{S} жанама құраушыдан. Доңғалақ 2 1-ші доңғалақ реакциясының жанама \vec{S} құраушысының әсерінен сағат тілі жүрісіне қарсы айналады. Нормаль реакция \vec{N} 2-ші доңғалақтың центріне қарай, ал жіптің \vec{T} реакциясы жіп бойымен 2-ші доңғалақтан тыс бағытталады. Жүк 3 жіп бойымен жүктен тыс бағытталған жіптің \vec{T} реакция күші әсерінен ілгерілемелі жоғары қарай қозғалады. Әр дене үшін қозғалыс теңдеуін құрамыз.



21 сурет

1-ші доңғалақтың айналу қозғалысының теңдеуі:

$$J_{1z}\varepsilon_1 = \sum M_z^{(e)} \Rightarrow J_{1z}\varepsilon_1 = P \cdot R_1 - S \cdot r_1.$$

2-ші доңғалақтың айналу қозғалысының теңдеуі:

$$J_{2z}\varepsilon_2 = \sum M_z^{(e)} \Rightarrow J_{2z}\varepsilon_2 = S \cdot R_2 - M_c - T \cdot r_2.$$

Жүктің ілгерілемелі қозғалысының теңдеуі:

$$m_3 a_3 = \sum F_y^{(e)} \Rightarrow m_3 a_3 = T - m_3 g.$$

2-ші доңғалақтың бұрыштық үдеуін және жүктің үдеуін 1-ші доңғалақтың бұрыштық үдеуі арқылы жазамыз:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{r_1} \Rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{R_2}; \quad a_3 = \varepsilon_2 \cdot r_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1 r_2}{R_2}.$$

Теңдеулер жүйесі келесі түрге келеді:

$$\begin{cases} J_{1z}\varepsilon_1 = P \cdot R_1 - S \cdot r_1 \\ J_{2z}\varepsilon_1 \frac{r_1}{R_2} = S \cdot R_2 - M_c - T \cdot r_2 \\ m_3 \varepsilon_1 \frac{r_1 r_2}{R_2} = T - m_3 g \end{cases}.$$

Бұл жүйеде 1-ші доңғалақтың бұрыштық үдеуі мен қатар T және S әрекеттесу күштері де белгісіз. Олардан құтылу үшін алдымен жүйенің 3-ші теңдеуінен жіптің реакция күшін өрнектейміз: $T = m_3 \varepsilon_1 \frac{r_1 r_2}{R_2} + m_3 g$. Жүйенің 2-ші теңдеуінен S жанама реакциясын шығарып, жіптің реакциясы үшін табылған формуланы қолданамыз:

$$S = \frac{J_{2z}\varepsilon_1 \frac{r_1}{R_2} + M_c + T \cdot r_2}{R_2} = \frac{J_{2z}\varepsilon_1 \frac{r_1}{R_2} + M_c + \left(m_3 \varepsilon_1 \frac{r_1 r_2}{R_2} + m_3 g \right) \cdot r_2}{R_2}.$$

Жанама күш өрнегіне 2-ші доңғалақтың инерция моментінің $J_{2z} = m_2 i_{2z}^2$

формуласын қойып, аламыз: $S = m_2 i_{2z}^2 \varepsilon_1 \frac{r_1}{R_2} + \frac{M_c}{R_2} + m_3 \varepsilon_1 \frac{r_1 r_2^2}{R_2} + m_3 g \cdot \frac{r_2}{R_2}.$

Осы өрнекті жүйенің 1-ші теңдеуіне қоямыз, сонда алатынымыз:

$$J_{1z} \varepsilon_1 = P \cdot R_1 - \left(m_2 i_{2z}^2 \varepsilon_1 \frac{r_1}{R_2} + \frac{M_c}{R_2} + m_3 \varepsilon_1 \frac{r_1 r_2^2}{R_2^2} + m_3 g \cdot \frac{r_2}{R_2} \right) r_1.$$

Табылған теңдеуге 1-ші доңғалақтың инерция моментінің $J_{1z} = m_1 i_{1z}^2$ формуласын қойып және түрлендірулерді жүргізіп, теңдеуді мына түрде жазамыз:

$$\varepsilon_1 \left(m_1 i_{1z}^2 + m_2 i_{2z}^2 \frac{r_1^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^2} \right) = P \cdot R_1 - M_c \frac{r_1}{R_2} - m_3 g \cdot \frac{r_2 r_1}{R_2}.$$

Осыдан 1-ші доңғалақтың бұрыштық үдеуі табылады:

$$\varepsilon_1 = \frac{P \cdot R_1 - M_c \frac{r_1}{R_2} - m_3 g \cdot \frac{r_2 r_1}{R_2}}{m_1 i_{1z}^2 + m_2 i_{2z}^2 \frac{r_1^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_1^2 r_2^2}{R_2^2}}.$$

Берілген сандық деректерді қойған соң, аламыз:

$$\varepsilon_1 = \frac{3000 \cdot 0,8 - 500 \frac{0,6}{1,2} - 400 \cdot 9,8 \cdot \frac{0,6 \cdot 0,6}{1,2}}{100 \cdot 0,7^2 + 150 \cdot 0,8^2 \cdot \frac{0,6^2}{1,2^2} + 400 \frac{0,6^2 \cdot 0,6^2}{1,2^2}} = \frac{974}{109} = 8,94 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Жауабы: $\varepsilon_1 = 8,94 \text{ рад} / \text{с}^2$.

3.3 Бақылау сұрақтары

- 1) Материалдық нүкте динамикасының негізгі теңдеуі
- 2) Нүкте динамикасының екі негізгі мәселесі
- 3) Материалдық нүкте қозғалысының декарт координат жүйесіндегі дифференциалдық теңдеулері
- 4) Материалдық нүкте қозғалысының табиғи осьтердегі дифференциалдық теңдеулері
- 5) Қозғалыстың бастапқы шарттары және олардың интегралдау тұрақтыларын анықтау үшін қолданылуы
- 6) Қатты дененің айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері
- 7) Қатты дененің айналу осіне қатысты инерция моменті
- 8) Қатты дененің айналу осіне қатысты инерция радиусы

Әдебиеттер тізімі

1 СТ НАО 56023-1910-04-2020. Оқу-әдістемелік, оқу және бітіру жұмыстары. Оқу-әдістемелік, оқу және бітіру жұмыстарының құрылысына, баяндалуына, ресімделуі мен мазмұнына қойылатын жалпы талаптар. – Алматы: АЭЖБУ, 2020.

2 Механика: оқу құралы/ Б.Ж. Қырықбаев, Ә. Жауыт. – Алматы: АЭЖБУ, 2021.

3 Теориялық механика : оқулық / Ә.Н. Төреқожаев, Д.Т. Туғанбаева, Б.Ж. Қырықбаев. - Алматы : ИП "Ашиқбаева", 2019.

4 Теориялық және қолданбалы механика. Практикум. Өзіндік жұмыс орындауға арналған мысалдар және тапсырмалар/С.Н. Тойбаев, А.Д. Дінасылов, Р.Қ. Қойлыбаева. – Алматы: Нур-Принт, 2016.

5 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для технических вузов. - 15-е изд., стереотипное. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 384 с.

Мазмұны

Кіріспе	3
1 Есептік-сызба жұмысы №1	3
1.1 Жазық күштер жүйесінің тепе–теңдігі	3
1.2 Кеңістік күштер жүйесінің тепе–теңдігі	7
1.3 Бақылау сұрақтары	12
2 Есептік-сызба жұмысы № 2 Кинематика	12
2.1 Қатты денелердің қарапайым қозғалыстарының түрлендірілуі	12
2.2 Жазық механизмді кинематикалық талдау	16
2.3 Бақылау сұрақтары	20
3 Есептік-сызба жұмысы №3.Динамика	20
3.1 Нүкте динамикасы	20
3.2 Жүйе динамикасы	23
3.3 Бақылау сұрақтары	27
Әдебиеттер тізімі	28

Роза Қайруллақызы Қойлыбаева

ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА

6В07128 «Аэроғарыштық инженерия» білім беру бағдарламасы студенттері үшін есептік-сызба жұмыстарды орындауға арналған тапсырмалар және әдістемелік нұсқаулар

Редактор
Стандарттау бойынша маман

Е.Б.Жанабаева
Ж.А.Ануарбек

Басылымға қол қойылды 24.02.2025
Таралымы 50 дана
Көлем 1,8 оқу-бас.ә.

Пішімі 60x84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс № . Бағасы 900 теңге

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейту бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1