Некоммерческое акционерное общество

АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА ДАУКЕЕВА

Кафедра математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ I

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов всех образовательных программ бакалавриата

Алматы 2025

СОСТАВИТЕЛЬ: Масанова А.Ж.**,** Уразова Г.Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления I. Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов всех образовательных программ бакалавриата. – Алматы: АУЭС, 2025. – 58 стр.

Методические указания составлены в соответствии с силлабусом и содержат задачи по разделам «Пределы», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции одной переменной»**.** Разобраны типовые задачи с приведением необходимого теоретического материала.

Ил. 3, табл. 35, библиогр. – 6 назв.

Рецензент: магистр, ст. преподаватель Л.Н. Рудакова

Печатается по плану издания некоммерческого акционерного общества «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева» на 2025 г.

© НАО «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева», 2025 г.

1 Расчетно-графическая работа № 1. Пределы

Цель: дать обучающимся навыки в вычислении пределов и умении раскрывать неопределенности с использованием свойств замечательных пределов и нахождении точек разрыва функции.

1.1 Теоретические вопросы

1. Числовые последовательности и их пределы.
2. Предел функции.
3. Замечательные пределы.
4. Непрерывность функции. Односторонние пределы.
5. Точки разрыва функции и их классификация.

1.2 Расчётные задания

1. Найти первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$.

Таблица 1.1

1.1 $x_n = -\frac{3+2n}{n+5}$	1.2 $x_n = \frac{5n^2}{3+2n^2}$	1.3 $x_n = \frac{n^2}{2+n^2}$
1.4 $x_n = \frac{7-4n}{n-2}$	1.5 $x_n = -\frac{1+2n}{3n-4}$	1.6 $x_n = \frac{3+2n}{4-n}$
1.7 $x_n = \frac{2n-1}{2n-3}$	1.8 $x_n = \frac{1+3n}{6-n}$	1.9 $x_n = \frac{5n+15}{n-6}$
1.10 $x_n = \frac{1+2n^2}{2-4n^2}$	1.11 $x_n = \frac{3n}{n+2}$	1.12 $x_n = \frac{5n+1}{10n-3}$
1.13 $x_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}$	1.14 $x_n = \frac{3n^3}{n^3+1}$	1.15 $x_n = \frac{3n^2}{2-n^2}$
1.16 $x_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}$	1.17 $x_n = -\frac{5n}{n+7}$	1.18 $x_n = \frac{3-4n}{n+5}$
1.19 $x_n = -\frac{3+2n}{2n+1}$	1.20 $x_n = \frac{2-2n}{3+5n}$	1.21 $x_n = \frac{3+2n}{n+9}$
1.22 $x_n = \frac{n^2}{2+n^2}$	1.23 $x_n = \frac{3-n}{n+1}$	1.24 $x_n = \frac{4+5n}{1-3n}$
1.25 $x_n = \frac{3n}{2n+5}$	1.24 $x_n = \frac{9-n^3}{2n^3-1}$	1.27 $x_n = \frac{3n^2}{4n^2-1}$
1.28 $x_n = \frac{3-n^2}{n^2+1}$	1.27 $x_n = -\frac{4n^2}{2+3n^2}$	1.30 $x_n = \frac{1+2n^2}{2+3n^2}$

2. Зная первые четыре члена последовательности, написать формулу ее общего члена.

Таблица 1.2

2.1 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots..$	2.2 $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots.$
2.3 $1, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots.$	2.4 $\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}, \ldots.$
2.5 $1, \frac{1}{2\cdot 5}, \frac{1}{3\cdot 5^2}, \frac{1}{4\cdot 5^3}, \ldots.$	2.6 $\frac{1}{5\cdot 3}, \frac{1}{5^2\cdot 5}, \frac{1}{5^3\cdot 7}, \frac{1}{5^4\cdot 9}, \ldots.$
2.7 $1, -\frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, -\frac{1}{4^3}, \ldots.$	2.8 $1, -\frac{1}{8}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{64}, ..$
2.9 $1, \frac{3}{2\cdot 3}, \frac{3^2}{2^2\cdot 5}, \frac{3^3}{2^3\cdot 7}, \ldots.$	2.10 $1, \frac{1}{3\cdot 2}, \frac{1}{3^2\cdot 3}, \frac{1}{3^3\cdot 4}, \ldots.$
2.11 $\frac{1}{1\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 7}, \frac{1}{7\cdot 10}, \ldots.$	2.12 $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \ldots.$
2.13 $1, \frac{1}{16}, \frac{1}{49}, \frac{1}{100}, \ldots.$	2.14 $1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{49}, \ldots.$
2.15 $\frac{1}{2ln2}, -\frac{1}{3n3l}, \frac{1}{4ln4}, -\frac{1}{5ln5},.$	2.16 $1, \frac{2}{\sqrt{5^2\cdot 5}}, \frac{4}{\sqrt{5^2\cdot 9}}, \frac{8}{\sqrt{5^2\cdot 13}}, \ldots$
2.17 $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots.$	2.18 $1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \ldots.$
2.19 $1, \frac{2}{9}, \frac{3}{25}, \frac{4}{49}, \ldots.$	2.20 $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \ldots.$
2.21 $1, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{1}{8\cdot 7}, \ldots$	2.22 $\frac{1}{2^3}, \frac{2}{3^3}, \frac{3}{4^3}, \ldots$
2.23 $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$	2.24 $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{16}{27}, \frac{8}{81}, \ldots$
2.25 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots.$	2.26 $\frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots.$
2.27 $-1, \frac{1}{3^3}, -\frac{1}{5^3}, \frac{1}{7^3}, \ldots.$	2.28 $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}, \ldots$
2.29 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \ldots.$	2.30 $\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{6}, \frac{25}{8}, \ldots.$

3. Найти предел.

Таблица 1.3

3.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$	3.3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$
3.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$	3.5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$	3.6 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$
3.7 $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$	3.8 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$	3.9 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$
3.10 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$	3.11 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$	3.12 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$
3.13 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$	3.14 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$	3.15 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$
3.16 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$	3.17 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$	3.18 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-9x-10}{3x^2+x-2}$
3.19 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$	3.20 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-x-44}{x^2-x-12}$	3.21 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$
3.22 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$	3.23 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$	3.24 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$
3.25 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$	3.26 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-6x-27}$	3.27 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$
3.28 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$	3.29 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$	3.30 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$

4. Найти предел.

Таблица 1.4

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$	4.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$	4.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$
4.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$	4.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x-5}{2x^2+x+7}$	4.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-7x+2}{x^4+2x-4}$
4.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$	4.8 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$	4.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$
4.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$	4.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$	4.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$
4.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2-1}$	4.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$	4.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$
4.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$	4.17 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+4}{x^4+5x-1}$	4.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$
4.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$	4.20 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$	4.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$
4.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$	4.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$	4.24 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$
4.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$	4.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+6x+9}{1+4x-x^3}$	4.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$
4.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$	4.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$	4.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3-1}$

5. Найти предел.

Таблица 1.5

5.1 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	5.2 $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$	5.3 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$
5.4 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$	5.5 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{4+x}}{3x^2-4x+1}$	5.6 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$
5.7 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$	5.8 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	5.9 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$

Продолжение таблицы 1.5

5.10 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$	5.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	5.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$
5.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$	5.14 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	5.15 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$
5.16 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$	5.17 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	5.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$
5.19 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	5.20 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$	5.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$
5.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	5.23 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	5.24 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$
5.25 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$	5.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$	5.27 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$
5.28 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{x+8}-3}$	5.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$	5.30 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$

6. Найти предел, используя «первый замечательный предел».

Таблица 1.6

6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{\sin 4x}$	6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 8x}$	6.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\mathrm{tg}13x}$
6.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{tg}12x}$	6.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x}$	6.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg}6x}$
6.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\mathrm{tg}13x}$	6.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{3x}$	6.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\mathrm{tg}17x}$
6.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 9x}$	6.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{12x}$	6.12 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\,\mathrm{ctg}3x$
6.13 $\lim\limits_{x\to 0}2x\,\mathrm{ctg}7x$	6.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 3x}$	6.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}11x}{2x}$
6.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\mathrm{tg}9x}$	6.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\mathrm{tg}x}$	6.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin 5x}$
6.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\mathrm{tg}5x}$	6.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16x}{\sin 4x}$	6.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 12x}{10x}$
6.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 14x}$	6.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$	6.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11x}{\sin 3x}$
6.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{9x}$	6.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{9x}$	6.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\mathrm{tg}2x}$
6.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{4x}$	6.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{sin5x}$	6.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin3x}{2x}$

7. Найти предел, используя «второй замечательный предел».

Таблица 1.7

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$	7.2 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$	7.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}$
7.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x}$	7.5 $\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{\frac{3}{x}}$	7.6 $\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$
7.7 $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{7/x}$	7.8 $\lim\limits_{x\to0}(1-9x)^{\frac{2}{x}}$	7.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{3x}$
7.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$	7.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{7x}$	7.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{9x}$
7.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{7x}$	7.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{2x}$	7.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{x/6}$
7.16 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{1/x}$	7.17 $\lim\limits_{x\to0}(1-11x)^{2/x}$	7.18 $\lim\limits_{x\to0}(1-8x)^{\frac{7}{x}}$
7.19 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{7/x}$	7.20 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{2/x}$	7.21 $\lim\limits_{x\to0}(1+7x)^{\frac{2}{x}}$
7.22 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{2x}{5}\right)^{\frac{2}{x}}$	7.23 $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{9/x}$	7.24 $\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{\frac{2}{x}}$
7.25 $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{7/x}$	7.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x/2}$	7.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{7x}$
7.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}\right)^{7x}$	7.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}$	7.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{2x}$

8. Найти предел.

Таблица 1.8

8.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$	8.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$	8.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$	8.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$
8.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$	8.6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$	8.7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{5x}$	8.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{4x}$
8.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$	8.10 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$	8.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$	8.12 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$
8.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$	8.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$	8.15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$	8.16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$
8.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$	8.18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$	8.19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$	8.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$
8.21 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$	8.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$	8.23 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$	8.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$
8.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$	8.26 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$	8.27 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$	8.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$
8.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{9x-4}\right)^{2x}$	8.30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$		

9. Исследовать функцию на непрерывность.

Таблица 1.9

9.1 $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$	9.2 $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$	9.3 $f(x) = 5^{\frac{1}{x+1}}$
9.4 $f(x) = 7^{\frac{1}{x-4}}$	9.5 $f(x) = 7^{\frac{1}{5+x}}$	9.6 $f(x) = 8^{\frac{1}{x-3}}$
9.7 $f(x) = 9^{\frac{1}{5-x}}$	9.8 $f(x) = 9^{\frac{1}{x-7}}$	9.9 $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$
9.10 $f(x) = 16^{\frac{1}{x-2}}$	9.11 $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}$	9.12 $f(x) = 3^{\frac{1}{x-4}}$
9.13 $f(x) = 12^{\frac{1}{x}}$	9.14 $f(x) = 7^{\frac{1}{x-3}}$	9.15 $f(x) = 3^{\frac{1}{4-x}}$
9.16 $f(x) = 8^{\frac{1}{x-2}}$	9.17 $f(x) = 8^{\frac{1}{5-x}}$	9.18 $f(x) = 18^{\frac{1}{x}}$
9.19 $f(x) = 10^{\frac{1}{7-x}}$	9.20 $f(x) = 11^{\frac{1}{5-x}}$	9.21 $f(x) = 14^{\frac{1}{6-x}}$
9.22 $f(x) = 15^{\frac{3}{4-x}}$	9.23 $f(x) = 15^{\frac{1}{8-x}}$	9.24 $f(x) = 19^{\frac{4}{2+x}}$
9.25 $f(x) = 11^{\frac{1}{4+x}}$	9.26 $f(x) = 5^{\frac{7}{8-x}}$	9.27 $f(x) = 13^{\frac{1}{5+x}}$
9.28 $f(x) = 6^{\frac{9}{4-x}}$	9.29 $f(x) = 4^{\frac{1}{x-5}}$	9.30 $f(x) = 11^{\frac{2}{x-3}}$

10. Исследовать функцию на непрерывность.

Таблица 1.10

10.1 $g(x) = \frac{7}{2+x}$	10.2 $g(x) = \frac{1}{4-x}$	10.3 $g(x) = \frac{1}{x-12}$
10.4 $g(x) = \frac{1}{x+12}$	10.5 $g(x) = \frac{6}{x-4}$	10.6 $g(x) = \frac{5}{x-22}$
10.7 $g(x) = \frac{7}{2x+1}$	10.8 $g(x) = \frac{7}{8-2x}$	10.9 $g(x) = \frac{3}{5x-25}$

Продолжение таблицы 1.10

10.10 $g(x)=\dfrac{3}{9-3x}$	10.11 $g(x)=\dfrac{6}{x-4}$	10.12 $g(x)=\dfrac{9}{25-5x}$
10.13 $g(x)=\dfrac{4}{9-x}$	10.14 $g(x)=\dfrac{2}{8-4x}$	10.15 $g(x)=\dfrac{7}{5-x}$
10.16 $g(x)=\dfrac{3}{4-2x}$	10.17 $g(x)=\dfrac{10}{x+5}$	10.18 $g(x)=\dfrac{12}{8-8x}$
10.19 $g(x)=\dfrac{12}{4x-2}$	10.20 $g(x)=\dfrac{9}{8+2x}$	10.21 $g(x)=\dfrac{3}{2+x}$
10.22 $g(x)=\dfrac{1}{6-2x}$	10.23 $g(x)=\dfrac{10}{x-3}$	10.24 $g(x)=\dfrac{7}{8-2x}$
10.25 $g(x)=\dfrac{1}{9-x}$	10.26 $g(x)=\dfrac{11}{x-15}$	10.27 $g(x)=\dfrac{5}{3-x}$
10.28 $g(x)=\dfrac{1}{2x+5}$	10.29 $g(x)=\dfrac{3}{8-x}$	10.30 $g(x)=\dfrac{16}{x+15}$

11. Исследовать функцию на непрерывность и построить график.

Таблица 1.11

11.1 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x \prec -1, \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1, \\ 2x, & x \succ 1. \end{cases}$	11.2 $f(x)=\begin{cases} x+4, & x \le 0, \\ (x+1)^2, & 0 \prec x \le 2, \\ -x+4, & x \succ 2. \end{cases}$	11.3 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \le -1, \\ x^2+1, & -1 \prec x \le 1, \\ -x+3, & x \succ 1. \end{cases}$
11.4 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \le 0, \\ -(x-1)^2, & 0 \prec x \prec 2, \\ x-3, & x \ge 2. \end{cases}$	11.5 $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x \le -1, \\ (x+1)^2, & -1 \prec x \prec 0, \\ x, & x \ge 0. \end{cases}$	11.6 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 \prec x \le 2, \\ x+1, & x \succ 2. \end{cases}$

Продолжение таблицы 1.11

11.7 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1\prec x\le 3, \\ x+2, & x\succ 3. \end{cases}$	11.8 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\prec 0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ x+3, & x\succ 4. \end{cases}$	11.9 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0, \\ 0, & 0\prec x\le 2, \\ x-2, & x\succ 2. \end{cases}$
11.10 $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ x, & 0\prec x\le 1, \\ x+2, & x\succ 1. \end{cases}$	11.11 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\prec 0, \\ x, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x\succ 2. \end{cases}$	11.12 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \pi/2, \\ 0, & \pi/2\prec x\prec \pi, \\ 2, & x\ge \pi. \end{cases}$
11.13 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0, \\ x^2, & 0\prec x\prec 2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$	11.14 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\prec 0, \\ x^2-1, & 0\le x\prec 1, \\ -x, & x\ge 1. \end{cases}$	11.15 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\prec 0, \\ x^2+1, & 0\le x\prec 2, \\ 1+x, & x\ge 2. \end{cases}$
11.16 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ 1, & 0\prec x\le 2, \\ x^2-2, & x\succ 2. \end{cases}$	11.17 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\prec 0, \\ \sin x, & 0\le x\prec \pi, \\ 3, & x\ge \pi. \end{cases}$	11.18 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\prec -1, \\ x^2+1, & -1\le x\le 2, \\ 2x, & x\succ 2. \end{cases}$
11.19 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0, \\ 2^x, & 0\prec x\le 2, \\ x+3, & x\succ 2. \end{cases}$	11.20 $f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2, \\ x^3, & -2\prec x\le 1, \\ 2, & x\succ 1. \end{cases}$	11.21 $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1, \\ x^2-2, & -1\prec x\prec 2, \\ x, & x\ge 2. \end{cases}$
11.22 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1, \\ (x-2)^2, & 1\prec x\prec 3, \\ -x+6, & x\ge 3. \end{cases}$	11.23 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\prec 1, \\ x^2+2, & 1\le x\le 2, \\ -2x, & x\succ 2. \end{cases}$	11.24 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\prec -1, \\ x-1, & -1\le x\le 3, \\ -x+5, & x\succ 3. \end{cases}$
11.25 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le -2, \\ -x+1, & -2\prec x\le 1, \\ x^2-1, & x\succ 1. \end{cases}$	11.26 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ -x^2+4, & 0\prec x\prec 2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$	11.27 $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ x^2-1, & -1\prec x\le 2, \\ 2x, & x\succ 2. \end{cases}$
11.28 $f(x)=\begin{cases} -1, & x\prec 0, \\ \cos x, & 0\le x\le \pi, \\ 1-x, & x\succ \pi. \end{cases}$	11.29 $f(x)=\begin{cases} 2, & x\prec -1, \\ 1-x, & -1\le x\le 1, \\ \ln x, & x\succ 1. \end{cases}$	11.30 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0, \\ x^3, & 0\prec x\le 2, \\ x+4, & x\succ 2. \end{cases}$

1.3 Контрольные вопросы

1. Что называют односторонними пределами в точке?
2. Какие функции называются бесконечно малыми?
3. Какие функции называют эквивалентными?

1.4 Решение типового варианта

1. Найти первые четыре члена последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{2n+1}{n^2+2}\right\}$.

Решение: подставляя в формулу общего члена поочередно *n*=1, 2, 3, 4, получим:

$$x_1 = \frac{2\cdot 1+1}{1^2+2} = 1,\quad x_2 = \frac{2\cdot 2+1}{2^2+2} = \frac{5}{6},\quad x_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3^2+2} = \frac{7}{11},\quad x_4 = \frac{2\cdot 4+1}{4^2+2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

2. Зная первые четыре члена последовательности, написать формулу ее общего члена: $-\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{2}{3\cdot 3^2},\ -\frac{3}{5\cdot 3^3},\ \frac{4}{7\cdot 3^4}$.

Решение: так как знаки членов последовательности чередуются и первый член имеет знак «-», то формула общего члена содержит $(-1)^n$. В знаменателе этих стоят нечетные числа, вычисляемые по формуле общего члена *2n-1:*

$$x_1 = (-1)^1\frac{1}{3\cdot(2-1)},\quad x_2 = (-1)^2\frac{2}{3^2\cdot(4-1)},$$

$$x_3 = (-1)^3\frac{3}{3^3\cdot(6-1)},\quad x_4 = (-1)^4\frac{4}{3^4\cdot(8-1)}.$$

Исходя из состава первых четырех членов окончательно имеем формулу членов последовательности:

$$\{x_n\} = \left\{(-1)^n\frac{n}{(2n-1)\cdot 3^n}\right\}.$$

3. Найти предел: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Решение: так как пределы числителя и знаменателя при $x \to -2$ равны нулю, то получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, надо числитель и знаменатель разложить на множители и сократить на общий множитель:

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

4. Найти предел: $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$.

Решение: поскольку числитель и знаменатель при $x \to -\infty$ бесконечно большие функции, то получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{-\infty}{3}=-\infty.$$

5. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Решение: при $x \to 4$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное числителю и преобразуем:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

6. Найти предел, используя «первый замечательный предел»:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg9x}{8x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{e^{5x}-1}$.

Для раскрытия неопределенности в пределах вида $\frac{0}{0}$ часто применяется *первый замечательный предел* или его следствия:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k;\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1\ ;\quad 4\ )\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Также для раскрытия в пределах неопределенности вида $\frac{0}{0}$ удобно применять свойства эквивалентных бесконечно малых функций по таблице 1.12.

Решение: а) применяем свойство первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg9x}{8x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 9x}{\cos 9x}}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{8x}\cdot\frac{1}{\cos 9x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\frac{9}{8\cos 9x}=1\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{8};$$

б) здесь числитель и знаменатель заменяем на эквивалентные функции по таблице 1.12 формулы 5,7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{e^{5x}-1}=\left|\begin{matrix}\cos 4x-1\sim\frac{(4\mathrm{x})^2}{2}\\ e^{5x}-1\sim 5\mathrm{x}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(4\mathrm{x})^2}{2}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{10x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{5}=0.$$

Таблица 1.12 – Эквивалентные бесконечно малые функции

$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$, т.е. $x\longrightarrow a$, $a\le\infty$, $\alpha(x)$ – бесконечно малая		
1. $\sin\alpha(x)\approx\alpha(x)$	5. $a^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)\ln a$	9. $\ln(1+\alpha(x))\approx\alpha(x)$
2. $tg\alpha(x)\approx\alpha(x)$	6. $e^{\alpha(x)}-1\approx\alpha(x)$	10. $(1+\alpha(x))^a-1\approx a\cdot\alpha(x)$
3. $\arcsin\alpha(x)\approx\alpha(x)$	7. $1-\cos\alpha(x)\approx\frac{(\alpha(x))^2}{2}$	11. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\approx\frac{\alpha(x)}{n}$
4. $arctg\alpha(x)\approx\alpha(x)$	8. $\log_a(1+\alpha(x))\approx\frac{\alpha(x)}{\ln a}$	

7. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{5x}$, используя «второй замечательный предел».

Решение: в раскрытии неопределенности вида $\left|1^{\infty}\right|$ применяется второй *замечательный предел* или его о*бобщённая форма:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e, \qquad \lim_{N(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{N(x)}\right)^{N(x)}=e,$$

где *e = ,71828182…..*

При $x\to\infty$ получается неопределенность вида 1^{∞}. Для раскрытия ее сведем выражение ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{5x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2x-3}\cdot 5x}=e^{\frac{15}{2}}.$$

8. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

Решение: при значении $x=\infty$ получается неопределенность вида $\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|$. В начале для раскрытия неопределенности в основании степени $\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|$ применяется свойство эквивалентности бесконечно больших функций и далее используется свойство показательной функции:

$$a^{\infty}=\begin{cases}0, \text{ при } a<1\\ \infty, \text{ при } a>1\end{cases};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}=\left|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{5x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty}=\left|\frac{2}{5}<1\right|=0.$$

9. Исследовать функцию $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$ на непрерывность.

Решение: функция $f(x)=9^{\frac{5}{8-x}}$ определена и непрерывна в интервалах $x\in(-\infty;8)\cup(8;+\infty)$. Следовательно, разрыв возможен в точке $x_0=8$. Находим односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(8-0)=\lim_{x\to 8-0} 9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8-0)}}=9^{\frac{5}{+0}}=9^{+\infty}=+\infty,$$

$$f(8+0)=\lim_{x\to 8+0} 9^{\frac{5}{8-x}}=9^{\frac{5}{8-(8+0)}}=9^{\frac{5}{-0}}=9^{-\infty}=\frac{1}{9^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Односторонние пределы неравны *f(2-0)≠f(2+0)*, и функция терпит бесконечный разрыв, следовательно, $x_0=8$ – точка разрыва второго рода;

10. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{4}{5+3x}$ на непрерывность.

Решение: функция $f(x)=\dfrac{4}{5+3x}$ определена и непрерывна в интервалах $x\in(-\infty;-\frac{5}{3})\cup\left(-\frac{5}{3};+\infty\right)$. Следовательно, разрыв возможен в точке $x_0=-\frac{5}{3}$. Находим односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(-\frac{5}{3}-0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}-0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}-0\right)}=\frac{4}{5-5-0}=\frac{4}{-0}=-\infty,$$

$$f(-\frac{5}{3}+0)=\lim_{x\to-\frac{5}{3}+0}\frac{4}{5+3x}=\frac{4}{5+3\cdot\left(-\frac{5}{3}+0\right)}=\frac{4}{5-5+0}=\frac{4}{+0}=+\infty,$$

т. е. в точке $x_0=-\frac{5}{3}$ функция терпит бесконечный разрыв. Следовательно, $x_0=-\frac{5}{3}$ – точка разрыва второго рода.

11. Исследовать на непрерывность и построить график функции:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2x, & x\le -1,\\ x^2-3, & -1\prec x\le 2,\\ 5-x, & x\succ 2.\end{cases}}$$

Решение: так как функция задана тремя формулами, разрыв может случиться в точках $\boldsymbol{x=-1}$ и $\boldsymbol{x=2}$, т. е. в местах «стыка» двух линий. Находим односторонние пределы функции в точке $\boldsymbol{x=-1}$:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}2x=2(-1-0)=-2\,,$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}(x^2-3)=-2\,.$$

Так как односторонние пределы функции *f(-1-0)=f(-1+0)* стремятся к одному и тому числу в точке $x=-1$, значит, в этой точке функция неразрывна.

Находим односторонние пределы функции в точке $x=2$:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}(x^2-3)=1\neq\infty\,,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}(5-x)=3\ \neq\infty.$$

График этой функции приведен на рисунке 1. В точке $x=2$ функция терпит разрыв первого рода, так как односторонние пределы функции *f(2-0)≠f(2+0)* неравны и стремятся к разным числам (не к бесконечности) и скачок функции в этой точке равен *f(2+0)-f(2-0)*=3-1=2.

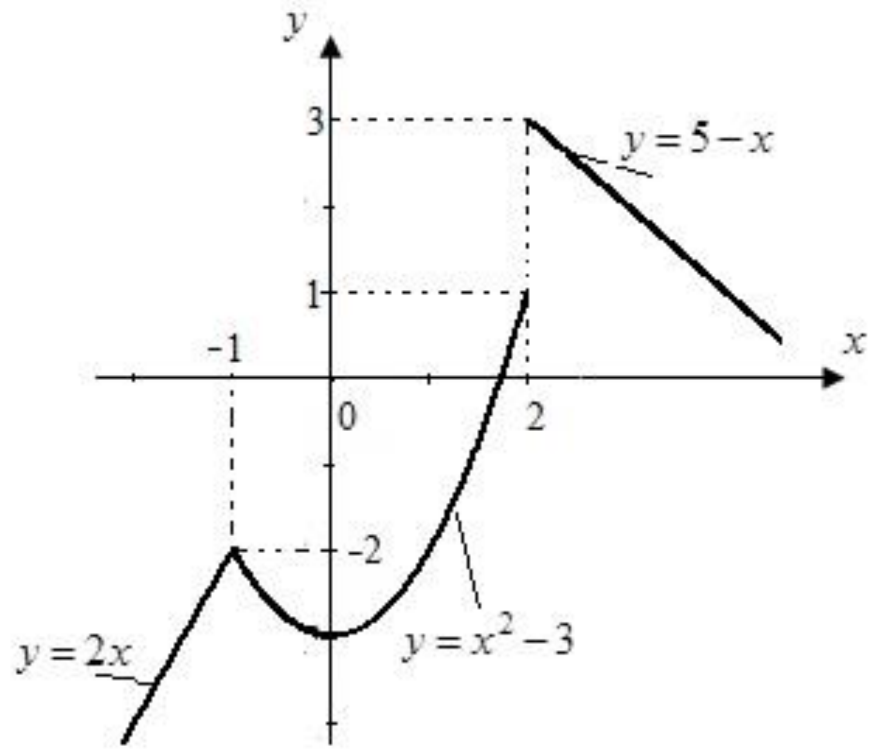

Рисунок 1 – График функции $\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases}\boldsymbol{2x,\ x\leq -1,}\\ \boldsymbol{x^2-3,\ -1\prec x\leq 2,}\\ \boldsymbol{5-x,\ x\succ 2.}\end{cases}$

2 Расчетно-графическая работа 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Цель: привить студентам навыки в дифференцировании различных сложных функций для решения практических задач. Дать практические навыки в исследовании функций при помощи аппарата дифференцирования.

2.1 Теоретические вопросы

1. Производная функции. Дифференциал функции.
2. Дифференцирование параметрически заданной функции.
3. Дифференцирование неявно заданной функции.
4. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
5. Признаки монотонности функции. Экстремумы функции.
6. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба.
7. Асимптоты графика функции.
8. Исследование функции с помощью производной. Построение графика функции.

2.2 Расчётные задания

1. Найти производную функции.

Таблица 2.1

1.1 а) $y = x^2 - \sqrt[9]{x^4} + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^8}$, б) $y = x^8 \cdot cosx$, в) $y = \frac{3x^4}{arccos(x+1)}$.	1.2 а) $y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 +$ $+ \frac{2}{x^4}$, б) $y = x^5 \cdot tgx$, в) $y = \frac{arctgx}{3x}$.	1.3 а) $y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} -$ $- \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$, б) $y = x^6 \cdot ctgx$, в) $y = \frac{4x^3}{arcsinx}$.
1.4 а) $y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^2 + \frac{4}{x}$, б) $y = x^6 \cdot sinx$, в) $y = \frac{5x^7}{arctgx}$.	1.5 а) $y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} +$ $+ \frac{6}{x}$, б) $y = x^9 \cdot ctgx$, в) $y = \frac{arcsinx}{3x^4}$.	1.6 а) $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} +$ $+ \frac{4}{x} - \frac{5}{x^3}$, б) $y = x^8 \cdot cosx$, в) $y = \frac{3x^4}{arccosx}$.

Продолжение таблицы 2.1

1.7 а) $y = 3x^5 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x} +$ $+3\sqrt{x^3},$ б) $y = x^3 \cdot cosx,$ в) $y = \frac{arcsinx}{9x^5}.$	1.8 а) $y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^7} - 4x^6 +$ $+\frac{2}{x^5},$ б) $y = x^7 \cdot ctgx,$ в) $y = \frac{arctgx}{3x^4}.$	1.9 а) $y = 8x^4 + \sqrt[3]{x^4} -$ $-\frac{2}{x} - \frac{4}{x^3},$ б) $y = x^7 \cdot ctgx,$ в) $y = \frac{7x^3}{arccosx}.$
1.10 а) $y = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} + 2x^2 + \frac{7}{x},$ б) $y = x^6 \cdot cosx,$ в) $y = \frac{4x^7}{arctgx}.$	1.11 а) $y = 2x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{x^4} +$ $+\frac{3}{x},$ б) $y = x^9 \cdot tgx,$ в) $y = \frac{arccosx}{5x^4}.$	1.12 а) $y = 9x^2 - \sqrt[3]{x^7} +$ $+\frac{4}{x} - \frac{6}{x^3},$ б) $y = x^8 \cdot sinx,$ в) $y = \frac{6x^4}{arcsinx}.$
1.13 а) $y = 4x^5 - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x} +$ $+7\sqrt[3]{x},$ б) $y = 2x^4 \cdot sinx,$ в) $y = \frac{arccosx}{x^7}.$	1.14 а) $y = \frac{5}{x} + \sqrt[5]{x^2} - x^3 +$ $+\frac{3}{x^4},$ б) $y = 2x^6 \cdot tgx,$ в) $y = \frac{arctgx}{x^5}.$	1.15 а) $y = x^4 + \sqrt[3]{x^5} -$ $-\frac{7}{x} - \frac{8}{x^2},$ б) $y = x^4 \cdot ctgx,$ в) $y = \frac{x^5}{arcsinx}.$
1.16 а) $y = 4\sqrt{x} - \frac{7}{x^5} - 6x^2 + \frac{4}{x},$ б) $y = x^7 \cdot sinx,$ в) $y = \frac{3x^8}{arctgx}.$	1.17 а) $y = 6x + \frac{4}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{2}{x},$ б) $y = x^9 \cdot ctgx,$ в) $y = \frac{arcsinx}{7x^4}.$	1.18 а) $y = x^2 - \sqrt[3]{x^4} +$ $+\frac{1}{x} - \frac{7}{x^3},$ б) $y = x^9 \cdot cosx,$ в) $y = \frac{8x^4}{arccosx}.$
1.19 а) $y = 3x^7 - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} + 3\sqrt[4]{x},$ б) $y = x^3 \cdot tgx,$ в) $y = \frac{arccosx}{9\,x^5}.$	1.20 а) $y = \frac{4}{x} + \sqrt[5]{x^3} - 4x +$ $+\frac{2}{x^7},$ б) $y = x^7 \cdot cosx,$ в) $y = \frac{arctgx}{3x^4}.$	1.21 а) $y = 8x^6 + \sqrt[3]{x} -$ $-\frac{2}{x} - \frac{4}{x^9},$ б) $y = x^6 \cdot ctgx,$ в) $y = \frac{7x^3}{arcsinx}.$

Продолжение таблицы 2.1

1.22 а) $y = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^8} + 2x^3 + \frac{7}{x}$, б) $y = x^6 \cdot ctgx$, в) $y = \frac{4x^7}{arccosx}$.	1.23 а) $y = 2x + \frac{5}{x^9} - \sqrt[6]{x} + \frac{3}{x}$, б) $y = x^4 \cdot tgx$, в) $y = \frac{arcsinx}{5x^4}$.	1.24 а) $y = 9x - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^5}$, б) $y = x^9 \cdot sinx$, в) $y = \frac{6x^4}{arccosx}$.
1.25 а) $y = 2x - \frac{8}{x^3} + \frac{1}{x} + 9\sqrt{x}$, б) $y = (x+2)^3 \cdot sinx$, в) $y = \frac{arctgx}{6x^5}$.	1.26 а) $y = \frac{6}{x} + \sqrt[5]{x^2} - x^9 + \frac{2}{x^4}$, б) $y = (x-1)^5 \cdot tgx$, в) $y = \frac{arctgx}{x^2}$.	1.27 а) $y = x^4 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^9}$, б) $y = (x+1)^6 ctgx$, в) $y = \frac{x^4}{arccosx}$.
1.28 а) $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x^6} - x^9 + \frac{7}{x}$, б) $y = x^6 \cdot sinx$, в) $y = \frac{5x^7}{arcctg(x+2)}$.	1.29 а) $y = x^7 + \frac{5}{x^3} - \sqrt[9]{x^4} + \frac{6}{x}$, б) $y = x^9 \cdot ctgx$, в) $y = \frac{arcsin(x-1)}{3x^4}$.	1.30 а) $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt[3]{x}$, б) $y = x^3 \cdot sinx$, в) $y = \frac{arccosx}{2x^5}$.
1.31 а) y=$(4x + 2x^3)^{10}$, б) y= $\frac{sin^3 x}{2+3\cos^2 x}$, в) $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$.	1.32 а) y = $\sqrt[3]{x^8 + 5x^3}$, б) y = $3ctg^3(x^2+1)$, в) $g(x) = \frac{4x^7}{arctg^3 x}$.	1.33 а) y= $arctg(x^4 + x)$, б) y= $\frac{1}{3}tg^2 x + lgsin\,x$, в) y = $\frac{(e^{\cos x}+3)^2}{sin5x}$.

2. Найти производную функции.

Таблица 2.2

2.1 $f(x) = tg(8x^2 + x - 5)$	2.2 $f(x) = cos(3x^2 - 2)$	2.3 $f(x) = e^{7x+x^2}$
2.4 $f(x) = (4x + 2x^3)^{10}$	2.5 $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 10x^2}$	2.6 $f(x) = arctg(x^5 + 3x)$
2.7 $f(x) = tg(4x^2 + x + 5)$	2.8 $f(x) = sin(3x^2 - 2x)$	2.9 $f(x) = e^{2x-x^3}$
2.10 $f(x) = (3x^3 + 7x)^{15}$	2.11 $f(x) = \sqrt[3]{x^8 + 5x^3}$	2.12 $f(x) = arcctg(x^4 + x)$

Продолжение таблицы 2.2

2.13 $f(x) = ln(cos\, x + 4)$	2.14 $f(x) = cos(7x^2 - 6x)$	2.15 $f(x) = \frac{1}{2} sin^2 x + lncos\, x$
2.16 $f(x) = (3x^2 + 8x)^{18}$,	2.17 $f(x) = \sqrt[5]{x^5 + 10x^2 - 3}$	2.18 $f(x) = \frac{1}{2} cos^2 x + lnsin\, x$
2.19 $f(x) = cos(\sqrt[3]{x} + 2)$	2.20 $f(x) = \sqrt{2x + cos\, 5\, x}$	2.21 $f(x) = 13^{5x^3+2}$
2.22 $f(x) = (9x + 3x^5)^{12}$	2.23 $f(x) = \sqrt[7]{x + 5x^3}$	2.24 $f(x) = arcsin(x^4 + 7x)$
2.25 $f(x) = ln(6x^2 - x^3)$	2.26 $f(x) = (e^{tgx} + 1)^4$	2.27 $f(x) = \sqrt[6]{(sin\, x + 2x)^5}$
2.28 $f(x) = 4arctg^5 3x^2$	2.29 $f(x) = 2tg^3(arcsin\, 5\, x)$	2.30 $f(x) = (6^{cosx} + 3)^2$

3. Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями.

Таблица 2.3

3.1 $\begin{cases} x = (2t + 3)\, cos\, t, \\ y = 3t^3 \end{cases}$	3.2 $\begin{cases} x = 2\, cos\, t, \\ y = 3\, sin^2\, t \end{cases}$	3.3 $\begin{cases} x = 6\, cos^3\, t, \\ y = 2\, sin\, t \end{cases}$
3.4 $\begin{cases} x = 1/(t + 2), \\ y = t^2(t + 2) \end{cases}$	3.5 $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = 3te^{4t} \end{cases}$	3.6 $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$
3.7 $\begin{cases} x = 2t/(t^3 + 1), \\ y = t^3(t^2 + 1) \end{cases}$	3.8 $\begin{cases} x = te^t, \\ y = te^{-2t} \end{cases}$	3.9 $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5\sqrt{t^3} - 3t^2 \end{cases}$
3.10 $\begin{cases} x = (ln\, t)/t, \\ y = ln\, t \end{cases}$	3.11 $\begin{cases} x = e^t\, cos\, t, \\ y = e^t\, sin\, t \end{cases}$	3.12 $\begin{cases} x = t^4, \\ y = t\, ln\, t \end{cases}$
3.13 $\begin{cases} x = 5\, cos^2\, t, \\ y = 3\, sin\, t \end{cases}$	3.14 $\begin{cases} x = 5\, cos\, t, \\ y = 3 \sin 5t \end{cases}$	3.15 $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = ln(1 + t^2) \end{cases}$
3.16 $\begin{cases} x = arcsin\, t, \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$	3.17 $\begin{cases} x = 3(t - sin\, t), \\ y = 3(1 - cos\, t) \end{cases}$	3.18 $\begin{cases} x = 3(sin\, t - cos\, t), \\ y = 3(cos\, t + sin\, t) \end{cases}$
3.19 $\begin{cases} x = sin\, 2\, t, \\ y = cos^2\, t \end{cases}$	3.20 $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = \sqrt{t - 1} \end{cases}$	3.21 $\begin{cases} x = (ln\, t)/t, \\ y = t^2\, ln\, t \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.3

3.22 $\begin{cases} x = arccos\, t\,, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	3.23 $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3\sqrt{t^5} \end{cases}$	3.24 $\begin{cases} x = arcsin\, t\,, \\ y = ln\, t \end{cases}$
3.25 $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{8t}/t \end{cases}$	3.26 $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1} \end{cases}$	3.27 $\begin{cases} x = ln^2\, t\,, \\ y = t + ln\, t \end{cases}$
3.28 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1} \end{cases}$	3.29. $\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = t^2/(t+1) \end{cases}$	3.30 $\begin{cases} x = 5\, sin\, 3\, t, \\ y = 3\, cos^3\, t \end{cases}$

4. Найти производную от неявно заданной функции *F(x,y)=0.*

Таблица 2.4

№	*F(x,y)=0*
4.1	$tgx^2 + y^2 + 4x + 8 = 0$
4.2	$x^2 - 4y^2 - 2xy = 0$
4.3	$x^2 + y^2 + tgy + 4x = 8$
4.4	$ctgx + y^2 x + 3 = 0$
4.5	$\ln(x^2 - y^2) + 5x = 13$
4.6	$x^2 + y^2 + \sin(y + 4x) + 4 = 0$
4.7	$e^{2x} + y^2 + 3x = 46$
4.8	$x\cos 2y - tgx + 8 = 0$
4.9	$e^{2y} + e^x - 2x = 2$
4.10	$y^2 - \sin 3x - tgy + 2x = 0$
4.11	$\ln(x^2 + y^2) - 2xy + 2x = 0$
4.12	$-x^2 + y^2 + 6ctg(x + y) - 4 = 0$
4.13	$\ln\left(x^2 - y^2\right) - 2xy = 9$
4.14	$x^2 + 2y^2 - 4tgy = 1$
4.15	$4e^{2x} + 12x\ln y - 3y = 9$
4.16	$e^x + e^y + 6x + y - 8 = 0$

Продолжение таблицы 2.4

№	F(x,y)=0
4.17	$2x^2-3y^2+y-4x=0$
4.18	$\ln x-\ln y-5xy+2x=0$
4.19	$y^2-\cos 3x-ctgy+2x=0$
4.20	$chx+shy\ \ +4x+8=0$
4.21	$\sqrt[3]{x^2}+4y^3-ctgy=1$
4.22	$x^3-3y^2+4+18xy=0$
4.23	$2x^3-3y^2-4thy=1$
4.24	$x\cos y^2-14x+6=0$
4.25	$\ln(x+y^2)-5xy+2x=0$
4.26	$e^{2y}-e^{2x}-2xy=2$
4.27	$4e^{2x}-5x-\ln(y-3x)=9$
4.28	$x^2-3y^2+\sin(6y-4x)=14$
4.29	$x^2+2y^2+tg(x+y)-4x=0$
4.30	$\ln(x^2+2y^2)+x+y-4=0$

5. Найти вторую производную функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Таблица 2.5

5.1 $y=sin^2 x$, $x_0={}^{\pi}/_{4}$	5.2 $y=arctgx$, $x_0=1$	5.3 $y=ln(2+x^2)$, $x_0=0$
5.4 $y=e^x \cos x$, $x_0=0$	5.5 $y=e^x \sin 2x$, $x_0=0$	5.6 $y=e^{-x}\cos x$, $x_0=0$
5.7 $y=\sin 2x$, $x_0=\pi$	5.8 $y=(2x+1)^5$, $x_0=1$	5.9 $y=ln(1+2x)$, $x_0=2$
5.10 $y=\frac{1}{2}e^x x^2$, $x_0=0$	5.11 $y=arcsin x$, $x_0=0$	5.12 $y=(5x-4)^5$, $x_0=2$
5.13 $y=x\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$	5.14 $y=x^2 \ln x$, $x_0=\frac{1}{3}$	5.15 $y=x\sin 2x$, $x_0=-\frac{\pi}{4}$
5.16 $y=x\cos 2x$, $x_0=\frac{\pi}{12}$	5.17 $y=x^4 \ln x$, $x_0=1$	5.18 $y=x+arctgx$, $x_0=1$

Продолжение таблицы 2.5

5.19 $y = cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$	5.20 $y = ln(x^2 - 4)$ $x_0 = 3$	5.21 $y = x^2 \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
5.22 $y = x \arccos x$, $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	5.23 $y = (x+1)\, ln(x+1)$, $x_0 = -0.5$	5.24 $y = x \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$
5.25 $y = 2^{7x+5}$, $x_0 = 1$	5.26 $y = (4x-3)^5$, $x_0 = 1$	5.27 $y = x \arcsin x$, $x_0 = 2$
5.28 $y = (7x-4)^6$, $x_0 = 1$	5.29 $y = ln^3 x$, $x_0 = 1$	5.30 $y = sin(x^3 + \pi)$, $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$

6. Дана функция $y = f(x)$. Определить:
   а) область определения и точки разрыва;
   б) асимптоты графика функции;
   в) точки пересечения графика функции с осями координат;
   г) четность, нечетность;
   д) интервалы монотонности, экстремумы;
   е) интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба;
   ж) построить график.

Таблица 2.6

6.1 $y = \frac{x^3+4}{x^2}$	6.2 $y = \frac{x^2+1}{x-1}$	6.3 $y = \frac{2}{x^2+2x}$	6.4 $y = \frac{4x^2}{3+x^2}$	6.5 $y = \frac{12x}{x^2+9}$
6.6 $y = \frac{x^2-3x}{x-1}$	6.7 $y = \frac{4-x^3}{x^2}$	6.8 $y = \frac{x^2-4x+1}{x-4}$	6.9 $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$	6.10 $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$
6.11 $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$	6.12 $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$	6.13 $y = \frac{12-3x^2}{12+x^2}$	6.1 4 $y = \frac{9+6x}{x^2-2}$	6.15 $y = \frac{-8x}{x^2+4}$
6.16 $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$	6.17 $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$	6.18 $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$	6.19 $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	6.20 $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$
6.21 $y = \frac{4}{x^2+2x-3}$	6.22 $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$	6.23 $y = \frac{2x-7}{x^2+2x-3}$	6.24 $y = \frac{1}{x^4-1}$	6.25 $y = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$
6.26 $y = \frac{x^3-32}{x^2}$	6.27 $y = \frac{4(x+1)^2}{x^2+2x}$	6.28 $y = \frac{3x-2}{x^3}$	6.29 $y = \frac{x^2-6x}{(x-1)^2}$	6.30 $y = \frac{x^3+54}{x^3}$

7. Найти предел, используя правило Лопиталя.

Таблица 2.7

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$	7.2 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{\ln x}-x}{x-1}$	7.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$
7.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$	7.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{2\sin x+x}$	7.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$
7.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$	7.8 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$	7.9 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
7.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$	7.11 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}}{1-\cos 5x}$	7.12 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$
7.13 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 5x)}$	7.14 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg5x}$	7.15 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{5x}}{\sin x}$
7.16 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$	7.17 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$	7.18 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$
7.19 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}$	7.20 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{e^x-e^{-x}}$	7.21 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 6x}$
7.22 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{7^x-1}{3^x-1}$	7.23 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$	7.24 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{tg4x}$
7.25 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-4^x}{x\sqrt{1-x^2}}$	7.26 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$	7.27 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(7+x)}{\sqrt[7]{x-3}}$
7.28 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$	7.29 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{9x}-1}{\cos 5x}$	7.30 $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

2.3 Контрольные вопросы

1. Что называется производной функции в точке?
2. Что называется дифференциалом функции?
3. Когда можно применить правило Лопиталя при вычислении пределов?

2.4 Решение типового варианта

Таблица 2.8 – Производные элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$	7. $(\cos x)' = -\sin x$	13. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$	8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	14. $(shx)' = chx$
3. $(e^x)' = e^x$	9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	15. $(chx)' = shx$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	16. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	17. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
6. $(\sin x)' = \cos x$	12. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	

1. Найти производную функции:

а) $y = 2x^2 - 3\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^7}$; б)$y = 4x^2 \cdot 2^{-3x}$; в) $y = \frac{ctg^5 3x}{x+2}$.

Решение: а) используется формулы производной от элементарных степенной, показательной и тригонометрической функций (см таблица 2.8), а также применяется правило дифференцирования суммы функций:

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'.$$

Перед дифференцированием выражения необходимо расписать степень каждого слагаемого:

$$y' = \left(2x^2 - 3\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^7}\right)' = \left(2x^2 - 3x^{1/3} + 4x^{-1} - 5x^{-7}\right)=' $$

$$= 2 \cdot 2x \; - 3 \cdot \frac{1}{3} x^{1/3 - 1} + 4 \cdot (-1) x^{-1-1} - 5 \cdot (-7) x^{-7-1} =$$

$$= 4x \; - x^{-2/3} - 4x^{-2} + 35x^{-8};$$

б) применяется правило дифференцирования произведения двух функций:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

$$y' = \left(4x^2 \cdot 2^{-3x}\right)' = \left(4x^2\right)' \cdot 2^{-3x} + 4x^2 \cdot \left(2^{-3x}\right)' = 8x \cdot 2^{-3x} + 4x^2 \cdot 2^{-3x} \cdot \ln 2;$$

в) для упрощения производная числителя данной функции находится отдельно:

$$(ctg^5 3x)' = \left| \begin{matrix} \text{замена:} \\ u = ctg3x; \\ t = 3x \end{matrix} \right| = (u^5)'_u \cdot (ctgt)'_t \cdot (3x)' =$$
$$= 5u^4 \cdot \frac{-1}{sin^2 t} \cdot 3 = -5ctg^4 3x \frac{3}{sin^2 3\text{x}} = -\frac{15ctg^4 3x}{sin^2 3\text{x}};$$

Само исходное выражение дифференцируется по правилу частных двух функций:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

$$y' = \left(\frac{ctg^5 3x}{x+2}\right)' = \frac{(ctg^5 3x)' \cdot (x+2) - (x+2)' \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2} =$$
$$= \frac{-\frac{15ctg^4 3x}{sin^2 3\text{x}} \cdot (x+2) - 1 \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2} = \frac{\frac{-15(x+2)ctg^4 3x}{\sin^2 3x} - ctg^5 3x}{(x+2)^2} =$$
$$= \frac{-15(x+2)ctg^4 3x - \sin^2 3x \cdot ctg^5 3x}{(x+2)^2 \sin^2 3x}.$$

2. Найти производную функции $f(x) = arctg^3(ch5x)$.

Решение: производная сложной функции находится путем поэтапного раскрытия суперпозиции функций:

$$(arctg^3 ch5x)' = \left| \begin{matrix} \text{замена:} \\ u = arctg(t); \\ t = ch5x \end{matrix} \right| = (u^3)'_u \cdot (arctgt)'_t \cdot (ch5x)' =$$
$$= 3u^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} \cdot 5sh5x = 15arctg^2 ch5x \frac{sh5x}{1+ch^2 5\text{x}}.$$

3. Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 3t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 5. \end{cases}$

Решение: производную функции, заданной параметрическими уравнениями, находят по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Тогда для параметрической функции находим производные функций *x(t), y(t)* по отдельности и подставляем в формулу:

$$\begin{cases} x'_t = 12t^3 - 2t, \\ \quad y'_t = 3t^2, \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t^2}{2t(6t^2 - 1)} = \frac{3t}{2(6t^2 - 1)}.$$

4. Найти вторую производную функции: $y = ln^3\, x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение: вычисляется последовательно первая и вторая производные:

$$y' = (ln^3\, x)' = 3\, ln^2\, x \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\, ln^2\, x}{x},$$

$$y'' = \left(\frac{3\, ln^2\, x}{x}\right)' = \frac{2\, ln\, x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot ln^2\, x}{x^2} = \frac{2\, ln\, x - ln^2\, x}{x^2} = \frac{3\, ln\, x\, (2 - ln\, x)}{x^2},$$

$$y''(x = 1) = \frac{3\, ln\, 1 \cdot (2 - ln\, 1)}{1^2} = 0.$$

5. Найти производную y' от неявно заданной функции *F(x,y)=0:*

$$thx + shy \;\; + 4x + 8 = 0\,.$$

Решение: чтобы найти производную от неявно заданной функции, надо продифференцировать это уравнение *F(x,y)=0* по *x,* считая *y* функцией от *x.* Затем полученное выражение нужно разрешить относительно y':

$$\left(thx + shy \;\; + 4x + 8\right)' = 0\,,$$

$$\frac{1}{ch^2x}+chy\cdot y'+4=0,$$

$$chy\cdot y'=-\frac{1}{ch^2x}-4,$$

$$y'=\left(-\frac{1}{ch^2x}-4\right)\frac{1}{chy}.$$

6. Дана функция $y=\frac{x^2+1}{3x}$. Определить:

а) область определения и точки разрыва;
б) асимптоты графика функции;
в) точки пересечения графика функции с осями координат;
г) четность, нечетность;
д) интервалы монотонности, экстремумы;
е) интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба;
ж) построить график.

Решение:
а) $x=0$ – точка разрыва, а в области определения функция непрерывна:

$$x\neq 0\Leftrightarrow D(y):(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

б) прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, если $y(x_0\pm 0)= =\pm\infty$. Находим односторонние пределы функции в точке разрыва:

$$y(0-0)=\lim_{x\to -0}\frac{x^2+1}{3x}=-\infty,\quad y(0+0)=\lim_{x\to +0}\frac{x^2+1}{3x}=+\infty.$$

Прямая $y=kx+b$ есть наклонная асимптота, где k,b вычисяются по формуле:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{3x}-\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}=0.$$

Значит,

$x = 0$ – уравнение вертикальной асимптоты,

$y = \frac{1}{3}x$ – уравнение наклонной асимптоты;

в) область определения $D(y)$: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ не включает точку $x = 0$, поэтому график функции $y = f(x)$ не имеет пересечения с осью *0x*. Выражение числителя $x^2 + 1 \neq 0$, поэтому график функции $y = f(x) = \frac{x^2+1}{3x}$ не имеет пересечения с осью *0y;*

г) проверим функцию $y=\frac{x^2+1}{3x}$ на нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2+1}{3(-x)} = -\frac{x^2+1}{3x} = -y(x),$$

следовательно, график симметричен относительно начала координат и расположен в первой и третьей четвертях. Функция непериодическая.

Проверим значение функции в бесконечно отдаленных точках:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{3x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)'}{(3x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3} = +\infty,$$

т. е. функция неограниченно возрастает;

д) найдем первую производную функции и приравняем ее к нулю:

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{3x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{3x^2} = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ есть стационарные точки, которые образуют четыре интервала. Исследуем на знак значение производной функции в каждом интервале:

в первом в интервале $-\infty < x < -1$, $y'(x) > 0$, значит функция возрастает,

во втором интервале $-1 < x < 0$, $y'(x) < 0$, значит функция убывает, тогда в точке $x = -1$ имеем локальный максимум: $y(-1) = -\frac{2}{3}$;

в третьем интервале $0 < x < 1$ производная $y'(x) < 0$, значит функция убывает,

в четвертом интервале $1 < x < +\infty$ производная $y'(x) > 0$, это означает функция возрастает; тогда точка $x = 1$ – локальный минимум:

$$y(1) = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3};$$

е) найдем вторую производную от функции:

$$y'' = \left(\frac{x^2-1}{3x^2}\right)'' = \frac{x^2-1}{3x^2} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{3x^3} \neq 0.$$

Вторая производная существует в области определения:
при $x \in (0; +\infty)$ вторая производная $y''(x) > 0$, значит график *выпуклый вниз*; при $x \in (-\infty; 0)$ вторая производная $y''(x) < 0$, значит график *выпуклый вверх*; точек перегиба нет.

ж) схематический график функции $y = \frac{x^2+1}{3x}$ изображен на рисунке 2.

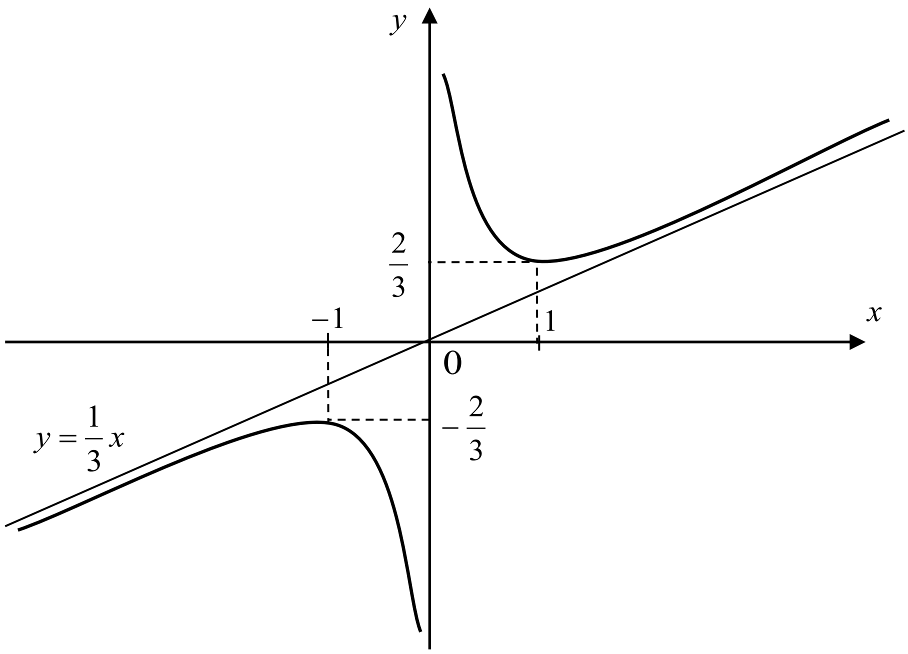

Рисунок 2 – График функции $y = \frac{x^2+1}{3x}$

7. Найти предел, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 7x}{x \sin 7x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Решение: а) правило Лопиталя используется для неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Здесь при x=0 правило Лопиталя применяется два раза:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{x\sin 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 7x)'}{(x\sin 7x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{\sin 7x+7x\cos 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(7\sin 7x)'}{(\sin 7x+7x\cos 7x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{49\cos 7x}{7\cos 7x+7(\cos 7x-x\sin 7x)}=\frac{49}{14};$$

б) при значении $x=0$ получается неопределенность вида $\infty-\infty$, тогда дроби приводятся к общему знаменателю, и далее для раскрытия неопределенности используются эквивалентные функции и правило Лопиталя 3 раза:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\sin^2 x)'}{(x^4)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)'}{(4x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)'}{(6x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{12x}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{1}{3}\cdot 1.$$

3 Расчетно-графическая работа 3. Интегральное исчисление функции одной переменной

Цель**:** освоение основных методов интегрирования при нахождении неопределенных и определенных интегралов, их приложений в геометрических и физических задачах.

3.1 Теоретические вопросы

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства.
2. Таблица интегралов.
3. Разложение дробно-рациональной функции на простейшие дроби. Интегрирование дробно-рациональной функции.
4. Интегрирование иррациональной функции.
5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная подстановка.
6. Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона – Лейбница. Применение определенного интеграла.
7. Метод замены переменной в неопределенном и определенном интегралах.
8. Метод интегрирования по частям в определенном и неопределенном интегралах.

3.2 Расчётные задания

Найти неопределенный интеграл.

Таблица 3.1

1.1	a) $\int\left(\sqrt[4]{x}-\frac{6}{x^4}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	b) $\int \pi^x\, e^{x-1}\, dx$
1.2	a) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{16+x^2}\right)dx$	b) $\int 4^x\,(3+2^{-x})\,dx$
1.3	a) $\int\left(\sqrt[5]{x}+\frac{6}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$	b) $\int 3^x\,(4+5^{-x})\,dx$
1.4	a) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^7}-\frac{4}{4+x^2}\right)dx$	b) $\int e^x(\,e^{-x}+4)\,dx$
1.5	a) $\int\left(3e^x+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{\sqrt{9+x^2}}\right)dx$	b) $\int 3^x\,2^{x+2}\,dx$
1.6	a) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^3}+\frac{8}{3+x^2}\right)dx$	b) $\int e^{2x}\,5^{-x}\,dx$
1.7	a) $\int\left(\sqrt[3]{x}-5x^3+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$	b) $\int 7^{-x}\,(3^x+2)\,dx$
1.8	a) $\int\left(7e^x+\frac{4}{x^5}-\frac{1}{25+x^2}\right)dx$	b) $\int 2^x(e^{-x}+3)\,dx$
1.9	a) $\int\left(\frac{7}{x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^4}+\frac{3}{25-x^2}\right)dx$	b) $\int(3^{-x}+2^{x+1})^2\,dx$
1.10	a) $\int\left(\sqrt[5]{x}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{9-x^2}\right)dx$	b) $\int 6^x\,(e^x+5)\,dx$
1.11	a) $\int\left(\sqrt[9]{x}+\frac{4}{x}-7^x\right)dx$	b) $\int 2^{-x}\,(e^x+4)\,dx$
1.12	a) $\int\left(\frac{2}{cos^2\boldsymbol{x}}-\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$	b) $\int 5^x\,(3^{-x}+1)\,dx$
1.13	a) $\int\left(\frac{7}{sin^2\boldsymbol{x}}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{36+x^2}\right)dx$	b) $\int e^{-x}\,(3^x+7)\,dx$
1.14	a) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}-6^x\right)dx$	b) $\int 4^x\,(\,3^{-x}+5)\,dx$
1.15	a) $\int\left(sin\boldsymbol{x}+\frac{9}{x^7}-\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$	b) $\int 3^x(\,e^{-x}+2)\,dx$
1.16	a) $\int\left(\sqrt[4]{x}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{4-x^2}\right)dx$	b) $\int 2^{6x}\,(3^{-x}+4)\,dx$

Продолжение таблицы 3.1

1.17	a) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{8}{x^4}-\frac{1}{2+x^2}\right)dx$	b) $\int 6^x\,2^{-x}\,dx$
1.18	a) $\int \left(\sqrt[5]{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{3}{81-x^2}\right)dx$	b) $\int 3^x\,(2^{x+1}+3)\,dx$
1.19	a) $\int \left(cosx+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\right)dx$	b) $\int e^x(\,e^{-5x}+4)\,dx$
1.20	a) $\int \left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{5}{x^5}-\frac{3}{16+x^2}\right)dx$	b) $\int 2^{-x}\,(3^{2x}+4)\,dx$
1.21	a) $\int \left(\sqrt[4]{x}+\frac{9}{x^3}-\frac{3}{cos^2x}\right)dx$	b) $\int 3^x\,(4^{-x}+5)\,dx$
1.22	a) $\int \left(e^x+\frac{4}{x^7}-\frac{6}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$	b) $\int \pi^x\,4^{-x}\,dx$
1.23	a) $\int \left(cosx+\frac{5}{x^4}-\frac{1}{\sqrt{49+x^2}}\right)dx$	b) $\int 6^x(\,3^{-x}-2)\,dx$
1.24	a) $\int \left(\sqrt[6]{x}+\frac{3}{x}-\frac{1}{81+x^2}\right)dx$	b) $\int 3^x\,(4^{-x}+3)\,dx$
1.25	a) $\int \left(\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x^3}-\frac{3}{\sqrt{16+x^2}}\right)dx$	b) $\int 4^{-x}\,(e^x+3)\,dx$
1.26	a) $\int \left(\frac{5}{cos^2x}+\frac{7}{x^3}-3^x\right)dx$	b) $\int e^{-4x}\,(e^{8x}+1)\,dx$
1.27	a) $\int \left(e^x+\frac{4}{x^7}-\frac{6}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx$	b) $\int 6^{2x}\,(3^{-x}-2)\,dx$
1.28	a) $\int \left(sinx+\frac{9}{x^7}-\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$	b) $\int e^{-7x}(\,e^{-5x}+4)\,dx$
1.29	a) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}+6^x\right)dx$	b) $\int 4^{3x}(\,3^{-x}+5)\,dx$
1.30	a) $\int \left(\sqrt[5]{x^2}+\frac{7}{x^3}-\frac{3}{81-x^2}\right)dx$	b) $\int \pi^{2x}\,4^{-x}\,dx$
1.31	a) $\int \frac{1-5x^3+9\sqrt[4]{x^5}}{x^4}dx$	б) $\int 3^x(5-7^{-x})\,dx$
1.32	a) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}\boldsymbol{dx}$	б) $\int 7^{-x}\left(\sqrt{7^{4x}}+5^x\right)$
1.33	a) $\int\left(\boldsymbol{x}\sqrt[3]{\boldsymbol{5x}}-\boldsymbol{3}\right)^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{dx}$	б) $\int e^{-x}(2^x-3e^{x+3})\,dx$
1.34	a) $\int\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}\right)^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{dx}$	б) $\int 5^x\cdot 3^{2-4x}\,dx$

2. Найти неопределенный интеграл.

Таблица 3.2

2.1	$\int\left(\frac{5}{9+x^2}\right)dx$	2.2	$\int\left(\frac{7}{3-x^2}-\frac{4}{5+x^2}\right)dx$	2.3	$\int\frac{dx}{1-7x^2}$
2.4	$\int\frac{dx}{3x^2+2}$	2.5	$\int\frac{dx}{2x^2-3}$	2.6	$\int\frac{dx}{3+7x^2}$
2.7	$\int\frac{2}{2x^2-1}dx$	2.8	$\int\frac{dx}{5-3x^2}$	2.9	$\int\frac{dx}{3x^2-2}$
2.10	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx$	2.11	$\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^2-2}\right)dx$	2.12	$\int\left(\frac{5}{x^2-3}-\frac{7}{x^2+3}\right)dx$
2.13	$\int\frac{dx}{4x^2+1}$	2.14	$\int\left(\frac{3}{x^2-5}-\frac{2}{x^2+3}\right)dx$	2.15	$\int\frac{dx}{4x^2-1}$
2.16	$\int\left(\frac{3}{4-x^2}-\frac{4}{1+x^2}\right)dx$	2.17	$\int\left(\frac{7}{9-x^2}+\frac{4}{25+x^2}\right)dx$	2.18	$\int\frac{dx}{4x^2+25}$
2.19	$\int\frac{dx}{16-27x^2}$	2.20	$\int\frac{2}{25x^2-1}dx$	2.21	$\int\frac{dx}{63+7x^2}$
2.22	$\int\frac{dx}{25x^2-36}$	2.23	$\int\left(\frac{5}{x^2+36}\right)dx$	2.24	$\int\frac{6dx}{36x^2-25}$
2.25	$\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2+4}\right)dx$	2.26	$\int\left(\frac{2}{9+x^2}+\frac{4}{4-x^2}\right)dx$	2.27	$\int\frac{dx}{49x^2+16}$
2.28	$\int\frac{dx}{4x^2-1}$	2.29	$\int\frac{dx}{64x^2+1}$	2.30	$\int\left(\frac{7}{81-x^2}\right)dx$

3. Найти интегралы, применяя подстановку или замену переменной.

Таблица 3.3

3.1	$\int sin(2x-5)\,dx$	3.16	$\int e^{1-3x}\,dx$
3.2	$\int cos(8x-1)\,dx$	3.17	$\int (5x-7)^{\frac{5}{2}}\,dx$
3.3	$\int \frac{dx}{3x+7}$	3.18	$\int sh(4x+3)\,dx$

Продолжение таблицы 3.3

3.4	$\int \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^3}}$	3.19	$\int cos(6x-1)\,dx$
3.5	$\int e^{3x+5}\,dx$	3.20	$\int (4x+3)^2\,dx$
3.6	$\int \frac{dx}{cos^2(2x-3)}$	3.21	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$
3.7	$\int \frac{dx}{7x-5}$	3.22	$\int 8^{7x-2}\,dx$
3.8	$\int ch(4x+5)\,dx$	3.23	$\int \frac{dx}{sin^2 7x}$
3.9	$\int tg(3x+7)\,dx$	3.24	$\int \frac{8dx}{\sqrt{6-x}}$
3.10	$\int 3^{6x-3}\,dx$	3.25	$\int \frac{5dx}{(8+2x)^2}$
3.11	$\int \frac{dx}{\sqrt{7x-3}}$	3.26	$\int sin(4x-5)\,dx$
3.12	$\int (9x+5)^8\,dx$	3.27	$\int cos(7x-2)\,dx$
3.13	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}}$	3.28	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$
3.14	$\int (7x-5)^{\frac{3}{2}}\,dx$	3.29	$\int \frac{dx}{sin^2(5x-2)}$
3.15	$\int \frac{dx}{ch^2(8x+5)}$	3.30	$\int \frac{dx}{sh^2(2x-5)}$

4. Найти неопределенный интеграл методом подведения под знак дифференциала.

Таблица 3.4

4.1	$\int e^{x^2}\cdot xdx$	4.2	$\int e^{-x^2}\cdot xdx$	4.3	$\int e^{5x^2}\cdot xdx$
4.4	$\int e^{\frac{x^2}{2}}\cdot xdx$	4.5	$\int e^{x^2+3}\cdot xdx$	4.6	$\int e^{1-3x^2}\cdot xdx$
4.7	$\int x\cdot\sqrt{x^2+1}dx$	4.8	$\int x\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^4}dx$	4.9	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$
4.10	$\int \frac{xdx}{x^2+10}$	4.11	$\int \frac{e^x dx}{e^x+5}$	4.12	$\int e^x\cdot\sqrt{3e^x-7dx}$

Продолжение таблицы 3.4

4.13	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-5}}$	4.14	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+10}$	4.15	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
4.16	$\int \frac{dx}{x \cdot \ln^3 x}$	4.17	$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$	4.18	$\int tgxdx$
4.19	$\int ctgxdx$	4.20	$\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x} dx$	4.21	$\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx$
4.22	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-4}$	4.23	$\int \frac{dx}{x \cdot (\ln^2 x + 1)}$	4.24	$\int x \cdot \sqrt{(x^2+3)^5} dx$
4.25	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$	4.26	$\int 4^{\cos x} \sin xdx$	4.27	$\int \frac{\cos x}{2+3\sin x} dx$
4.28	$\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$	4.29	$\int \frac{6^x}{1-6^x} dx$	4.30	$\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2} dx$

5. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

Таблица 3.5

5.1	$\int x \cdot e^{2x} dx$	5.2	$\int (x-1) \cdot e^{-x} dx$	5.3	$\int (2x+5) \cdot e^{\frac{x}{3}} dx$
5.4	$\int x \cdot \sqrt{x^2+1} dx$	5.5	$\int x \cdot 3^x dx$	5.6	$\int x \cdot \ln xdx$
5.7	$\int x \cdot \ln 5xdx$	5.8	$\int \sqrt{x} \cdot \ln xdx$	5.9	$\int (\ln x - 2\ln^2 x) dx$
5.10	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$	5.11	$\int (x+5) 3^x dx$	5.12	$\int x \cdot \cos xdx$
5.13	$\int x \cdot \sin xdx$	5.14	$\int x \cdot \cos 3xdx$	5.15	$\int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx$
5.16	$\int x \cdot \cos \frac{x}{3} dx$	5.17	$\int x \cdot \sin 5xdx$	5.18	$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$
5.19	$\int x \cdot 5^x dx$	5.20	$\int \frac{x}{2^x} dx$	5.21	$\int x^2 \sqrt{e^x} dx$
5.22	$\int x \cdot e^{-3x} dx$	5.23	$\int x \cdot \sin \frac{x}{3} dx$	5.24	$\int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$
5.25	$\int \sqrt[3]{x} \ln xdx$	5.26	$\int (x+5) 3^x dx$	5.27	$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$
5.28	$\int x \cdot \sin 3xdx$	5.29	$\int \frac{x}{7^x} dx$	5.30	$\int x\sqrt{e^x} dx$
5.31	$\int x \cdot arctgxdx$	5.32	$\int x^2 \cdot e^x dx$	5.33	$\int \arcsin 2xdx$

6. Найти интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен.

Таблица 3.6

6.1	$\int \frac{xdx}{x^2+10x+21}$	6.2	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}dx$
6.3	$\int \frac{5x-1}{\sqrt{2x^2+x-1}}\,dx$	6.4	$\int \frac{4x+1}{x^2-3x+2}dx$
6.5	$\int \frac{x+4}{3x^2+2x+1}\,dx$	6.6	$\int \frac{4x+1}{\sqrt{6x^2-x-2}}dx$
6.7	$\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-8x-9}}\,dx$	6.8	$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+24}dx$
6.9	$\int \frac{3x-6}{x^2+9x+8}dx$	6.10	$\int \frac{3x+2}{\sqrt{12x^2-7x+1}}\,dx$
6.11	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{5x^2+4x-1}}\,dx$	6.12	$\int \frac{2x+1}{6x^2-5x+1}dx$
6.13	$\int \frac{2x+5}{x^2-10x+9}dx$	6.14	$\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2-12x+35}}\,dx$
6.15	$\int \frac{6x+1}{\sqrt{x^2-10x+24}}\,dx$	6.16	$\int \frac{x+1}{\sqrt{12x^2-x-1}}\,dx$
6.17	$\int \frac{3x+2}{2x^2+x-1}dx$	6.18	$\int \frac{x+3}{x^2-17x+72}dx$
6.19	$\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+10x+21}}\,dx$	6.20	$\int \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-3x+1}}\,dx$
6.21	$\int \frac{4x-5}{x^2-14x+48}dx$	6.22	$\int \frac{x-5}{2x^2+3x+4}dx$
6.23	$\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2-13x+42}}\,dx$	6.24	$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-24}}\,dx$
6.25	$\int \frac{7x-1}{x^2+2x-24}dx$	6.26	$\int \frac{3x+2}{5x^2-6x+1}dx$
6.27	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x-2-x^2}}\,dx$	6.26.	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-14x+48}}\,dx$
6.29	$\int \frac{2xdx}{x^2-x-10}$	6.30	$\int \frac{x-1}{3x^2-4x+1}dx$

7. Найти неопределенный интеграл правильной дробно-рациональной функции.

Таблица 3.7

7.1	$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}$	7.2	$\int \frac{(x+1)}{(x-3)^2(x+4)}dx$	7.3	$\int \frac{(x-1)}{(x+2)^2(x-3)}dx$
7.4	$\int \frac{(x+1)}{x^2(x+3)}dx$	7.5	$\int \frac{x-7}{(x+5)(x-4)^3}dx$	7.6	$\int \frac{(x-14)dx}{(x+2)^2(x+3)}$
7.7	$\int \frac{(2x+1)}{(x+3)^2(x+4)}dx$	7.8	$\int \frac{(2x-1)}{(x+2)^2(2x-3)}dx$	7.9	$\int \frac{(2x+11)}{x^2(x+3)}dx$
7.10	$\int \frac{(x-1)dx}{(x-2)^3(x+3)}$	7.11	$\int \frac{dx}{x^2(x+2)}$	7.12	$\int \frac{dx}{x\cdot(x+1)^2}$
7.13	$\int \frac{3x+1}{(x-2)^2\cdot(x+1)}dx$	7.14	$\int \frac{x^2+7}{(x^2+4)(x-1)}dx$	7.15	$\int \frac{dx}{x\cdot(x^2+3)}$
7.16	$\int \frac{x^2+1}{x\cdot(x^2+3)}dx$	7.17	$\int \frac{dx}{x^3+1}$	7.18	$\int \frac{dx}{x^3-8}$
7.19	$\int \frac{x^3}{x^4-1}dx$	7.20	$\int \frac{x^2}{(x^3+1)(x+1)}dx$	7.21	$\int \frac{(4x+1)}{x^2(x+3)}dx$
7.22	$\int \frac{2x-7}{(x-5)(x-4)^3}dx$	7.23	$\int \frac{(x+12)}{(x-3)^3(x+4)}dx$	7.24	$\int \frac{(2x+1)dx}{(x-2)^3(x+3)}$
7.25	$\int \frac{(3x-1)}{(x+2)^3(x-3)}dx$	7.26	$\int \frac{(x+1)}{x(x+3)^2}dx$	7.27	$\int \frac{3x-7}{(x+5)^2(x-4)}dx$
7.28	$\int \frac{(5x+1)}{x^3(x+3)}dx$	7.29	$\int \frac{(2x-1)}{(x-3)(x+4)^2}dx$	7.30	$\int \frac{(x-1)}{(x+2)(x-3)^2}dx$

8. Найти неопределенный интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки.

Таблица 3.8

8.1	$\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$	8.2	$\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$
8.3	$\int \frac{dx}{5+3\sin x-5\cos x}$	8.4	$\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx$
8.5	$\int \frac{dx}{3+2\sin x-\cos x}$	8.6	$\int \frac{dx}{10\sin x+5\cos x}$

Продолжение таблицы 3.8

8.7	$\int \frac{dx}{5-3\cos x}$	8.8	$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$
8.9	$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$	8.10	$\int \frac{dx}{3+2\sin x+3\cos x}$
8.11	$\int \frac{dx}{5+4\sin x}$	8.12	$\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$
8.13	$\int \frac{dx}{7+3\sin x}$	8.14	$\int \frac{dx}{8+4\cos x}$
8.15	$\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$	8.16	$\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$
8.17	$\int \frac{dx}{3-4\sin x}$	8.18	$\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$
8.19	$\int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}$	8.20	$\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$
8.21	$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$	8.22	$\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$
8.23	$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$	8.24	$\int \frac{dx}{5+3\cos x}$
8.25	$\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$	8.26	$\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$
8.27	$\int \frac{dx}{7-3\sin x+\cos x}$	8.28.	$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$
8.29	$\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$	8.30	$\int \frac{dx}{2+\sin x-3\cos x}$

9. Вычислить определенный интеграл.

Таблица 3.9

9.1	$\int_{-1}^{2} x^4 dx$	9.2	$\int_{0}^{1} \left(\sqrt{x}-1\right)^2 dx$	9.3	$\int_{3}^{10} \sqrt[3]{x-2}dx$
9.4	$\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	9.5	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	9.6	$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{dx}{\cos^2 2x}$

Продолжение таблицы 3.9

9.7	$\int_0^1 \frac{x+2}{x+1}dx$	9.8	$\int_{0.5}^1 e^{-2x+1}dx$	9.9	$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$
9.10	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x^2 dx$	9.11	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$	9.12	$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2}$
9.13	$\int_{0.5}^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$	9.14	$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 t dt$	9.15	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
9.16	$\int_0^{\pi} \left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx$	9.17	$\int_{-1}^{-0.5} \frac{x^2-1}{x^4}dx$	9.18	$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$
9.19	$\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sin^2 t dt$	9.20	$\int_0^7 \sqrt[3]{x+1}dx$	9.21	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^3}$
9.22	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$	9.23	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2+1}{x^4}dx$	9.24	$\int_0^{16} \sqrt[4]{x^5}dx$
9.25	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}$	9.26	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\frac{x}{2}dx$	9.27	$\int_{0.5}^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$
9.28	$\int_{0.25}^1 \frac{dx}{(4x+1)^2}$	9.29	$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$	9.30	$\int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{x^2+1}{x^4}dx$

10. Вычислить определенный интеграл, используя метод замены переменной.

Таблица 3.10

10.1	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^3 x}}$	10.2	$\int_0^{0.5} x^3\cdot e^{-x^4}dx$
10.3	$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\cdot e^{-x^2}dx$	10.4	$\int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$
10.5	$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+1)}$	10.6	$\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{5x+1}}$

Продолжение таблицы 3.10

10.7	$\int_1^6 \frac{dx}{x+\sqrt{3x-2}}$	10.8	$\int_4^9 e^{-2\sqrt{x}}dx$
10.9	$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$	10.10	$\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{4+\sqrt{x+3}}dx$
10.11	$\int_{\ln 1}^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$	10.12	$\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$
10.13	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot \ln^3 x}$	10.14	$\int_0^1 x^2\sqrt{9-x^3}\,dx$
10.15	$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	10.16	$\int_1^{\ln^2 2} e^{-\sqrt{x}}dx$
10.19	$\int_0^1 x^3\cdot e^{x^2}dx$	10.20	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+2x^2+25}$
10.21	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$	10.22	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^3 x}}$
10.23	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+1}}$	10.24	$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x+2e^{-x}}$
10.25	$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$	10.26	$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4+12x^2+225}$
10.27	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+4}}$	10.28	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^5 x}}$
10.29	$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln^5 x}}$	10.30	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

11. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям.

Таблица 3.11

11.1	$\int_{2}^{3} x\ln(x-1)dx$	11.2	$\int_{-2}^{0} x^2 e^{-x/2}dx$	11.3	$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x^2 cosxdx$
11.4	$\int_{0}^{\pi} x^2 \sin xdx$	11.5	$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2xdx$	11.6	$\int_{1}^{2} (x-1)\ln(x)dx$
11.7	$\int_{-1/2}^{0} xe^{-2x}dx$	11.8	$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos xdx$	11.9	$\int_{-2/3}^{-1/3} x^2 e^{-3x}dx$
11.10	$\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$	11.11	$\int_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln(x)dx$	11.12	$\int_{0}^{1} arctg\sqrt{x}dx$
11.13	$\int_{0}^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$	11.14	$\int_{0}^{\pi/8} x^2 \sin 4xdx$	11.15	$\int_{1}^{3} x^2 \ln(x)dx$
11.16	$\int_{0}^{1} (x+3)arctgx$	11.17	$\int_{3/2}^{2} arctg(2x-3)dx$	11.18	$\int_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin xdx$
11.19	$\int_{1}^{e} x\ln^2(x)dx$	11.20	$\int_{-3}^{0} (x-2)e^{-\frac{x}{3}}dx$	11.21	$\int_{0}^{\pi/9} \frac{xdx}{\cos^2 3x}$
11.22	$\int_{0}^{1} xarcsin9xdx$	11.23	$\int_{1}^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x}dx$	11.24	$\int_{-1}^{0} x\ln(1-x)dx$
11.25	$\int_{0}^{1} xarccos4xdx$	11.26	$\int_{1}^{2} \ln(3x+2)dx$	11.27	$\int_{0}^{4} x^3\sqrt{x^2+9}dx$
11.28	$\int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}dx$	11.29	$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x^2 sinxdx$	11.30	$\int_{0}^{1} xarctg7xdx$

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Таблица 3.12

12.1	$y = x^2,\ y = 4$	12.11	$y = \sqrt{x}, y = x^2.$	12.21	$y = \frac{x^2}{2},\ y = 2x + \frac{5}{2}$
12.2	$y^2 = 16x,\ y = x$	12.12	$y^2 = x,\ y = x^2$	12.22	$y = x^2,\ y = 1 - x^2$
12.3	$y = x^2 - 5,$ $y = x - 3$	12.13	$y = \cos^2 x,$ $y = 0, x = 0$	12.23	$y = x^2 - 2x,\ y - 3 = 0$
12.4	$y = x^2 - 1,\ y = x + 1$	12.14	$y = tgx,\ y = \sqrt{3},$ $x = 0$	12.24	$y = x^2 - 1,$ $y = x + 3$
12.5	$y = ctgx,\ y = -1,$ $x = 0$	12.15	$y = -2x^2 + 3x + 6,$ $y = x + 2$	12.25	$y = 4x - x^2,\ y = x$
12.6	$x = y^2, x = 1.$	12.16	$y = (x-1)^2,$ $y = x + 1.$	12.26	$y = 2x^2, y = x,$ $x = -3$
12.7	$y = x^2 + 2x,$ $y = x + 2$	12.17	$y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$	12.27	$y = -x^2,$ $y = -x - 2$
12.8	$y = \frac{x^2}{9},\ y = \frac{x}{3} + 2$	12.18	$y = tgx,\ y = -1,$ $x = 0$	12.28	$y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2},$ $y = 5.$
12.9	$y = x^2 - x,\ y = 0,$ $x = 2.$	12.19	$y = x^2 + 4x,$ $y = 2x + 4$	12.29	$y = ctgx,\ y = 1,$ $x = \frac{\pi}{2}$
12.10	$y = tg2x,\ y = 1,$ $x = 0$	12.20	$y = x^2 + x,$ $y = x + 1$	12.30	$y = \sin x, y = 1,$ $x = -\frac{\pi}{3}.$

3.3 Контрольные вопросы

1. Что называется интегральным исчислением?
2. Какова формула интегрирования по частям?
3. В каких случаях применяется метод интегрирования по частям?

3.4 Решение типового варианта.

1. Найти неопределённый интеграл:

а) $\int(-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}+\frac{12}{x}-0.01\sqrt[5]{x^3})dx$; б) $\int 3^x-12e^x+\frac{4}{7^x})dx$;

в) $\int 3^x(2^{2x-4}+5^x)\,dx$; г) $\int\frac{(7-\sqrt[3]{x})^2}{x^3}dx$.

Решение: прежде чем применить таблицу интегралов, необходимо сначала провести преобразование интегрируемой функции. Здесь также используется правило интегрирования от суммы (разности) функций.

Таблица 3.13 – Интегралы основных элементарных функций

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, ($\alpha\neq$ -1)	11. $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$
2. $\int\frac{dx}{x}=ln\|x\|+C$	11′. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
3. $\int sin\,x\,dx=-cos\,x+C$	12. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$
4 $\int cos\,x\,dx=sin\,x+C$	13. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsin\,x+C$
5. $\int\frac{dx}{cos^2x}=tgx+C$	13′. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arcsin\frac{x}{a}+C$
6. $\int\frac{dx}{sin^2x}=-ctgx+C$	14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
7. $\int tgxdx=-ln\|cos\,x\|+C$	15. $\int shxdx=chx+C$
8. $\int ctgxdx=ln\|sin\,x\|+C$	16. $\int chxdx=shx+C$
9. $\int e^xdx=e^x+C$	17. $\int\frac{dx}{ch^2x}=thx+C$
10. $\int a^xdx=\frac{a^x}{ln\,a}+C$	18. $\int\frac{dx}{sh^2x}=-cthx+C$

а) перед непосредственным интегрированием приведем каждую из степенных функций к стандартному виду (см таблица 3.13, формула 1, 2):

$$\int(-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}+\frac{12}{x}-0.01\sqrt[5]{x^3})dx=\int(-7x^{-1/3}+12x^{-1}-0.01x^{3/5})dx=$$

$$=-7\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1}+12\ln x-0.01\frac{x^{3/5+1}}{3/5+1}+C;$$

б) подынтегральное выражение представляется через сумму показательных функций (см таблица 3, формула 10):

$$\int 3^x-12e^x+\frac{4}{7^x})dx=\int 3^x-12e^x+4\cdot 7^{-x})dx=$$

$$=\frac{3^x}{\ln 3}-12e^x+\frac{4\cdot 7^{-x}}{-\ln 7}+C;$$

в) перед непосредственным интегрированием дробное подынтегральное выражение приводится к сумме:

$$\int\frac{\left(7-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx=\int\frac{49-14\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x^3}dx=\int\left(\frac{49}{x^3}-\frac{14\sqrt[3]{x}}{x^3}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^3}\right)dx=$$

$$=\int\left(49x^{-3}-14x^{-\frac{8}{3}}+x^{-\frac{7}{3}}\right)dx=\frac{49x^{-2}}{-2}-\frac{14x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}}+\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-\frac{4}{3}}+C=$$

$$=-\frac{49}{2x^2}+\frac{42}{5x\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}+C;$$

г) используя свойства степеней, произведение показательных функций приводится к сумме с постоянными коэффициентами:

$$\int 3^x(2^{2x-4}+5^x)\,dx=\int(3^x\cdot 2^{2x-4}+3^x\cdot 5^x)\,dx=$$

$$=\int(3^x\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-4}++15^x)\,dx=\int(12^x\cdot 2^{-4}+15^x)\,dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{16}\cdot 12^x+15^x\right)dx=\frac{12^x}{16ln12}+\frac{15^x}{ln15}+C.$$

2. Найти неопределенный интеграл:

а) $\int\left(\frac{6}{2x^2+9}+\frac{12}{2x^2-9}\right)dx;$

б) $\int\left(\frac{5dx}{\sqrt{3-x^2}}+.\frac{4dx}{\sqrt{3+x^2}}\right)dx.$

Решение: в интегралах знаменатель состоит из суммы или разности квадратов или под радикалом. Поэтому интегралы сводятся к табличным (таблица 3.13, формула 11–14):

а) $$\int\left(\frac{6}{2x^2+9}+\frac{12}{2x^2-9}\right)dx=\int\frac{6dx}{2\left(x^2+\frac{9}{2}\right)}+\int\frac{12dx}{2\left(x^2-\frac{9}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}}arctg\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}}+$$

$$+\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{9}{2}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{9}{2}}-x}{\sqrt{\frac{9}{2}}+x}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{6}arctg\frac{\sqrt{2}x}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{3-\sqrt{2}x}{3+\sqrt{2}x}\right|+C;$$

б) $$\int\frac{5dx}{\sqrt{3-x^2}}+\int\frac{4dx}{\sqrt{3+x^2}}=5\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+4\ln\left|x+\sqrt{3+x^2}\right|+C.$$

3. Найти интегралы, применяя замену переменной $t=ax+b$:

а) $\int e^{1-5x}dx;$

б) $\int\cos(3x-1)-\sin(\frac{5x}{2}+6)+\frac{10}{\cos^2(5x-5)}+ch(3x-8)dx;$

в) $\int\frac{dx}{(5-7x)\sqrt[3]{5-7x}}.$

Решение: а) интегрирование степенных, показательных и тригонометрических функций с линейным аргументом $ax+b$ можно выполнить по формуле:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,\quad a,b\ -\ const \qquad (*)$$

или использовать замену переменной в интеграле:

$$t=ax+b,\ \ dx=\frac{1}{a}dt.$$

Используя замену переменной *t=1-3x,* выражение приводится к табличному:

$$\int e^{1-5x}dx = \left| \begin{matrix} t = 1-3x \\ dt = -3dx \to dx = -\frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{1-3x} + C;$$

б) интегрирование тригонометрических функций применяется сразу по формуле (*) с учётом коэффициентов (таблица 3.13, формула 4):

$$\int \cos(3x-1) - \sin(\frac{5x}{2}+6) + \frac{10}{\cos^2(5x-5)} + ch(3x-8)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\sin(3x-1) + \frac{2}{5}\cos(\frac{5x}{2}+6) + \frac{10}{5}tg(5x-5) + \frac{1}{3}ch(3x-8) + C;$$

в) здесь интегрирование сводится к степенной функции при замене линейного аргумента:

$$\int \frac{dx}{(5-7x)\sqrt[3]{5-7x}} = \int (5-7x)^{-4/3}dx = \left| \begin{matrix} t = 5-7x \\ dx = -\frac{1}{7}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{-7}\int t^{-4/3}dt =$$

$$= \frac{1}{-7}\frac{t^{-4/3+1}}{-4/3+1} = \frac{1}{21}\frac{1}{t^{1/3}} = \frac{1}{21}\frac{1}{\sqrt[3]{5-7x}} + C.$$

4. Найти неопределенный интеграл методом подведения под знак дифференциала: а) $\int \frac{cosx}{\sin^2 x}dx$; б) $\int \frac{xdx}{x^4+1}$; в) $\int \frac{(\ln x)^5\,dx}{x}$.

Решение: иногда бывает удобным ввести один из подынтегральных множителей под знак дифференциала $f(x)dx = d(F(x))$, и это позволяет все подынтегральное выражение привести к табличному (таблица 3.13, формула 1, 11):

а) $$\int \frac{cosx}{\sin^2 x}dx = \left|\cos x dx = d(\sin x)\right| = \int \frac{d\sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{\sin x} + c;$$

б) $\int \frac{xdx}{x^4+1} = \int \frac{d(x^2)}{2((x^2)^2+1)} = \frac{1}{2} arctg(x^2) + C$;

в) $\int \frac{(\ln x)^5 dx}{x} = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x) \right| = \int (\ln x)^5 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^6}{6} + C.$

5. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $a)\int(2x-7)\sin 5xdx$; б) $\int lnxdx$.

Решение: а) формула интегрирования по частям имеет вид:

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

которая применяется в интегралах вида $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin axdx$, $\int x^n \cos axdx$ и где рекомендуется ввести замену:

$$\mathrm{u} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}},$$
$$\mathrm{dv} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{ax}}\mathrm{dx},\ \ \mathrm{sinaxdx},\ \ \mathrm{cosaxdx}\}.$$

И к данному интегралу применим эту вышеуказанную замену:

$$\int (2x-7)\sin 5xdx = \left| \begin{matrix} u = 2x-7 & dv = \sin 5xdx \\ du = 2dx & v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5}(2x-7)\cos 5x + \frac{2}{5}\int \cos 5xdx = -\frac{1}{5}(2x-7)\cos 5x + \frac{2}{5}sin5x + C;$$

б) для применения формулы интегрирования по частям в интегралах вида $\int x^n \ln^m axdx$, $\int x^n \arcsin axdx$,

$\int x^n \arccos axdx$, $\int x^n arctg\, axdx$,

$\int x^n arcctg\, axdx$

рекомендуется использовать замену:

$$u = \{ln^m ax,\ \ arcsinax,\ \ arccosax\},$$

$$\mathrm{dv} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}}\mathrm{dx},\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Применим теперь эту вышеуказанную замену:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \to du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \to v = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} + C = x \ln x - x + C.$$

6. Найти интегралы функций, содержащих квадратный трехчлен: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$; *б)* $\int \frac{dx}{4-x^2-6x}$.

Решение: интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ находят методом выделения полного квадрата в знаменателе, далее они сводятся к табличным (таблица 3.13, формулы 11−14):

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a};$$

а) под корнем собирается полный квадрат и используется замена переменной:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+1}} = |x^2 - 6x + 1 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 1 = (x-3)^2 - 8| =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 - 8}} = \left| \begin{matrix} t = x - 3 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 8}} = ln\left|t + \sqrt{t^2 - 8}\right| + C =$$

$$= ln\left|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 1}\right| + C;$$

б) здесь из квадратного трехчлена собирается полный квадрат и привод+ится к табличному интегралу (таблица 3.13, формула 12):

$$\int \frac{dx}{4-x^2-6x} = \int \frac{dx}{4-(x^2+6x+9-9)} = \int \frac{dx}{13-(x+3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{13}} \ln\left|\frac{\sqrt{13}+x+3}{\sqrt{13}-x-3}\right| + c$$

7. Найти неопределенный интеграл правильной дробно-рациональной функции: $\int \frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2} dx$.

Решение: чтобы найти интегралы от рациональной функции, необходимо интегрируемую функцию разложить на сумму простейших дробей по количеству множителей в знаменателе. Разложение правильной дробно-рациональной функции на простейшие дроби имеет общий вид:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \\ \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+bx+c)} + \ldots + \frac{M_r x + N_r}{(x^2+bx+c)^r}, \quad n > m$$

Согласно этому правилу, наша дробно-рациональная функция имеет разложение в виде суммы простейших дробей с неизвестными коэффициентами A, B, C:

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-7} + \frac{C}{(x-7)^2},$$

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2} = \frac{A(x-7)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1)}{(x-1)(x-7)^2},$$

$$A(x-7)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1) = 3x+4.$$

Для нахождения неизвестных трех коэффициентов A, B, C используется метод неопределенных коэффициентов, или метод пробных точек для разложения правильной дробно-рациональной функции. Для этого строятся три уравнения относительно неизвестных A, B, C при задании трех различных значений *x* из последнего соотношения:

$$\text{при } x = 1: \qquad 36A = 7,$$
$$\text{при } x = 7: \qquad 18B + 6C = 25,$$
$$\text{при } x = 4: \qquad 9A + 3C = 16.$$

Из этой системы уравнений находятся коэффициенты *A, B, C*:

$$A = \frac{7}{36}, \; B = -\frac{7}{36}, \; C = \frac{4}{19},$$

$$\frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2} = \frac{\frac{7}{36}}{x-1} + \frac{-\frac{7}{36}}{x-7} + \frac{\frac{4}{19}}{(x-7)^2}.$$

Таким образом, исходное дробное выражение разложено на сумму простейших дробей, которые можно легко проинтегрировать:

$$\int \frac{3x+4}{(x-1)(x-7)^2}dx = \int \left(\frac{\frac{7}{36}}{x-1} + \frac{-\frac{7}{36}}{x-7} + \frac{\frac{4}{19}}{(x-7)^2} \right) dx =$$

$$= \frac{7}{36}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{7}{36}\int \frac{dx}{x-7} + \frac{4}{19}\int \frac{dx}{(x-7)^2} = \frac{7}{36} ln|x-1| -$$

$$- \frac{7}{36} ln|x-7| - \frac{4}{19}\cdot\frac{1}{x-7} + C = \frac{7}{36} ln\left|\frac{x-1}{x-7}\right| - \frac{4}{19(x-7)} + C.$$

8. Найти неопределенный интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки: $\int \frac{2\sin x}{3-\cos x}dx.$

Решение: к интегралу вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, содержащему тригонометрические функции, применяется универсальная тригонометрическая подстановка:

$$tg\frac{x}{2} = t, \qquad x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Интегрируемая функция при универсальной подстановке преобразовывается в рациональное выражение:

$$\int \frac{2\sin x}{3-\cos x}dx = \int \frac{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{4t}{1+t^2}}{\frac{4t^2+2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{4t}{4t^2+2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{t}{(2t^2+1)(1+t^2)}dt.$$

Полученное рациональное выражение далее по алгоритму разлагается на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{t}{(2t^2+1)(1+t^2)} = \frac{At+B}{2t^2+1} + \frac{Ct+D}{1+t^2},$$

$$\frac{t}{(2t^2+1)(1+t^2)} = \frac{(At+B)(1+t^2)+(Ct+D)(2t^2+1)}{(2t^2+1)(1+t^2)},$$

$$(At+B)(1+t^2)+(Ct+D)(2t^2+1) = t,$$

$$\begin{array}{l|c} t^3 & A+2C=0 \\ t^2 & B+2D=0 \\ t^1 & A+C=1 \\ t^0 & B+D=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=2, \\ B=0, \\ C=-1, \\ D=0. \end{array}$$

Таким образом интеграл вычисляется:

$$\int \frac{2\sin x}{3-\cos x}dx = 4\int \frac{t}{(2t^2+1)(1+t^2)}dt = 4\left(\int \frac{2t}{2t^2+1}dt - \int \frac{t}{1+t^2}dt\right) =$$

$$= 4\left(\int \frac{d(t^2)}{2t^2+1} - \int \frac{d\left(\frac{t^2}{2}\right)}{1+t^2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\int \frac{d(2t^2+1)}{2t^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{1+t^2}\right) =$$

$$= 2\big(ln(2t^2+1) - ln(t^2+1)\big) + C = ln\left(\frac{2t^2+1}{t^2+1}\right)^2 + C =$$

$$= ln\left(\frac{2tg^2\frac{x}{2}+1}{tg^2\frac{x}{2}+1}\right)^2 + C.$$

9. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+3)^3}$.

Решение: вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^в = F(в) - F(a).$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(x+3)^3} = \int_{-1}^{2}\frac{d(x+3)}{(x+3)^3} = \int_{-1}^{2}(x+3)^{-3}d(x+3) = \frac{(x+3)^{-3+1}}{-2}\Bigg|_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}\left[(2+3)^{-2} - (-1+3)^{-2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(5^{-2} - 2^{-2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{200}.$$

10. Вычислить определенный интеграл $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$, используя метод замены переменной.

Решение: в определенном интеграле метод замены переменной используется с учетом замены и пределов интегрирования:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{cosx}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \to dt = \cos x dx \\ t_1 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2} \\ t_2 = \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-1}}{-1}\bigg|_{1/\sqrt{2}0}^{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}/2} + \frac{1}{1/\sqrt{2}} .$$

11. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x \cos 2x \, dx$ методом интегрирования по частям.

Решение: формула интегрирования по частям для определеного интеграла имеет вид:

$$\int_a^в u d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^в - \int_a^в \upsilon du .$$

$$\int_0^1 xcos2xdx = \left| \begin{array}{c} x = u, \;\; dx = du, \\ cos2xdx = dv, \;\; v = \frac{1}{2} sin2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} xsin2x \Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 \frac{1}{2} sin2xdx = \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{4} cos2x\Big|_0^1 = \frac{sin\,2}{2} + \frac{1}{4}(cos\,2 - cos\,0) =$$

$$= \frac{sin\,2}{2} + \frac{1}{4}(cos\,2 - 1).$$

12. Вычислить площадь фигуры D, ограниченной линиями:

$$y = cos\,x\,, y = -2\,cos\,x, \text{ где } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение: площадь плоской фигуры для знакопостоянных на отрезке функций $f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a, в]$ вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^в \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int_a^в (y_2 - y_1)dx,$$

где *a, b* – точки пересечения этих линий функций.

Как показано на рисунке 3, значения пределов в определенном интеграле будут $a = -\frac{\pi}{2},\ b = \frac{\pi}{2},$ которые есть точки пересечения линий функции $y = cos\,x\,, y = -2\,cos\,x.$

Вычислим определенный интеграл:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos x - (-2\cos x)]dx = 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\,x\,dx = 3\,sin\,x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 3\left(sin\frac{\pi}{2} - sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\left(sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2}\right) = 6\,sin\frac{\pi}{2} = 6.$$

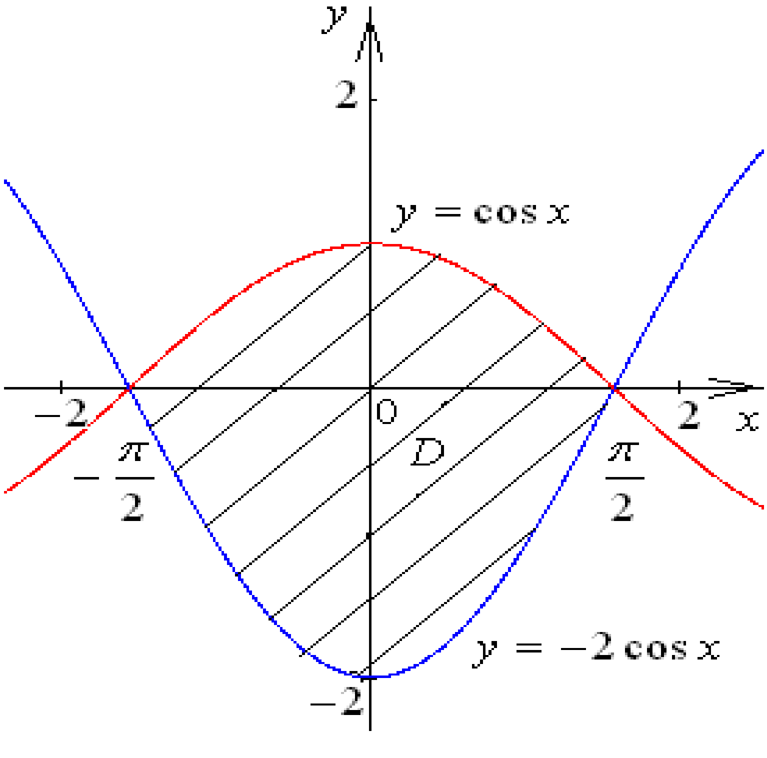

Рисунок 3 – Область, ограниченная линиями: $\boldsymbol{y = cos\,x\,, y = -2\,cos\,x}$

Список литературы

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 1: учебник для вузов. — 7-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 253 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02148-6.

2 Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ в 2 ч. Часть 2: учебник для вузов/ — 3-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09085-7.

3 Баврин И.И. Математический анализ: учебник и практикум. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2022. – 327 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-04617-5.

4 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. — 7-е издание (исправленное) – Издательства АСТ и «Мир и образование», 2015. – 815 с.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в трех частях: Учеб. пособие /под ред. А.П. Рябушко. – Издательство «Альянс», Россия, 2019.

6 Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты/ — 15-е издание – Лань, Россия, 2023. – 240 с. — ISBN 978-5-507-45701-4; официально допущено Минобрнауки РФ.

Содержание

Сводный план 2025, поз. 12

Масанова Аида Жайлауовна
Уразова Гульнара Жумабаевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ I

Методические указания и задания по выполнению расчетно-графических работ для студентов всех образовательных программ бакалавриата

Редактор: Жанабаева Е.Б.
Специалист по стандартизации: Ануарбек Ж.А.

Подписано в печать 29.10.2025
Тираж 50 экз.
Объем 3,0 уч.- изд. лист
Формат 60x84 1/16
Бумага типографская №1
Заказ ___ Цена 1500 тг

Копировально-множительное бюро
Некоммерческого акционерного общества
«Алматинский университет энергетики и связи »
050013, Алматы, Байтурсынова, 126/1