



**Коммерциялық емес
акционерлік қоғам**

**ҒҰМАРБЕК ДӘУКЕЕВ
АТЫНДАҒЫ АЛМАТЫ
ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ
БАЙЛАНЫС
УНИВЕРСИТЕТІ**

Математика және
математикалық үлгілеу
кафедрасы

ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

Барлық білім беру бағдарламалары бойынша оқитын студенттер үшін
есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар
мен тапсырмалар.

Алматы 2023

ҚҰРАСТЫРУШЫЛАР: Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж.
Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Барлық білім беру бағдарламалары бойынша оқитын студенттер үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭЖБУ, 2023. - 65 б.

«Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика» пәні бойынша есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар мен тапсырмалар №1, №2, №3 ЕСЖ тұрады. 2016 және 2019 жылғы 5B070300— Ақпараттық жүйелер мамандығының студенттері үшін әдістемелік нұсқаулардың өңделіп, толықтырылған нұсқасы болып табылады. Бағдарламаның негізгі теориялық сұрақтары келтірілген. Типтік нұсқаның шешімі келтірілген.

Библиогр. 5 атауы.

Пікір беруші: доцент, (PhD) ф.д., қауым.проф.

Ермекбаев М.М.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының 2023 ж. жоспары бойынша басылады.

© «Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» КеАҚ, 2023 ж.

Кіріспе

Ықтималдық теориясы біздің айналамыздағы болмыстың техникалық, әлеуметтік, биологиялық, экономикалық және басқа да жүйелерін зерттеумен айналысады, олар параметрлер мен жүйелердің мәндерін бірімәнді анықтау мүмкін еместігін сипаттайтын ықтималдық моделдер арқылы ұсынады. Ол практикалық есептердің кең ауқымы үшін теориялық негізді қамтамасыз ете отырып, қазіргі математиканың іргетасының бірі болады.

Әдістемелік нұсқаулықтар «Ықтималдық теориясы және математикалық статистика» пәнінің есептік-сызба жұмыстарынан тұрады.

Әрбір бөлімде теориялық сұрақтар мен мәліметтер келтірілген. Әрбір есептік-графикалық жұмыстардың типтік варианттың шешуі келтірілген.

1 Есептеу-сызба жұмыстары №1. Кездейсоқ оқиғалар

Мақсаты: кездейсоқ оқиғалар мен оның ықтималдығы туралы түсініктермен, ықтималдық теориясының негізгі теоремаларымен таныстыру.

1.1 Теориялық сұрақтар

1. Комбинаторика элементтері.
2. Элементар оқиғалар кеңістігі. Оқиғалар алгебрасы.
3. Ықтималдықтың статистикалық, геометриялық және классикалық анықтамалары.
4. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары. Шартты ықтималдық.
5. Толық ықтималдықтар формуласы. Байес формуласы.
6. Тәжірибенің қайталануы. Бернулли формуласы.
5. Лапласың аймақтық және интегралдық теоремасы.

1.2 Есептік тапсырмалар

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ сандар жиыны берілген. Анықтау керек:
 - а) осы жиыннан m –таңбалы әртүрлі қанша санды құруға болады, әрбір санда цифрлар қайталанбау керек;
 - б) осы жиыннан тоғыз таңбалы әртүрлі қанша санды құруға болады, әрбір санда цифрлар қайталанбау керек;
 - в) берілген жиынның элементтерінен әртүрлі цифрлардан тұратын қанша m –элементті ішкі жиын құруға болады;

№	m	№	m	№	m
1.1	2	1.11	5	1.21	8
1.2	3	1.12	6	1.22	2
1.3	4	1.13	7	1.23	3
1.4	5	1.14	8	1.24	4
1.5	6	1.15	2	1.25	5
1.6	7	1.16	3	1.26	6
1.7	8	1.17	4	1.27	7
1.8	2	1.18	5	1.28	8
1.9	3	1.19	6	1.29	2
1.10	4	1.20	7	1.30	3

2. Урнада n шар бар, олардың арасында n_1 ақ, n_2 кара, n_3 қызыл, n_4 көк ($\sum_{i=1}^4 n_i = n$). Анықтау керек:

- а) кез келген түсті m шарды алудың қанша әдісі бар

б) қанша әдіспен m_1 ақ, m_2 қара, m_3 қызыл, m_4 көк шар алуға болады
 $(\sum_i^4 m_i = m)$.

	n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4
2.1	3	2	2	4	2	1	1	1
2.2	4	3	2	3	2	1	2	1
2.3	3	3	4	2	2	1	2	2
2.4	2	4	5	1	2	2	3	1
2.5	3	4	3	2	2	2	3	2
2.6	2	5	2	3	1	3	1	2
2.7	4	4	2	2	2	2	2	1
2.8	2	7	2	1	1	5	2	1
2.9	3	1	6	2	2	1	3	1
2.10	1	3	3	2	1	3	1	1
2.11	1	4	2	2	0	2	1	1
2.12	2	3	1	3	1	2	0	1
2.13	3	1	2	3	0	1	1	2
2.14	3	2	3	1	2	2	2	0
2.15	2	2	2	3	1	1	1	2
2.16	1	2	3	4	1	1	2	1
2.17	2	2	4	2	1	1	1	2
2.18	2	3	4	1	1	2	3	1
2.19	1	4	2	3	1	2	1	2
2.20	4	2	2	2	3	1	2	1
2.21	3	2	3	2	2	1	3	1
2.22	5	1	2	2	3	1	1	1
2.23	2	5	2	1	1	3	1	1
2.24	4	2	3	2	2	1	2	1
2.25	3	3	4	2	2	1	1	2
2.26	2	3	3	3	1	2	3	1
2.27	1	3	4	3	1	2	2	1
2.28	2	3	4	2	1	2	3	2
2.29	1	2	3	5	1	1	2	3
2.30	2	3	4	2	1	2	2	1

3. Лотереяда N билет бар, оның M ұтысты. Табу керек:

- а) ұтысты билеттің қатысты жиілігін;
- б) сатып алынған t билеттердің барлығы ұтысты болу ықтималдығын;
- в) сатып алынған t билеттердің ішінде m_1 ұтысты болу ықтималдығын;
- г) сатып алынған t билеттердің ішінде ең болмағанда біреуі ұтысты болу ықтималдығын.

	N	M	m	m_1		N	M	m	m_1
3.1	70	8	5	3	3.16	100	25	10	8
3.2	75	9	8	4	3.17	90	15	12	7
3.3	85	6	5	2	3.18	85	10	7	4
3.4	90	12	7	4	3.19	80	9	5	3
3.5	87	10	8	3	3.20	95	15	9	3
3.6	100	30	15	5	3.21	70	10	9	5
3.7	90	20	9	3	3.22	80	15	7	5
3.8	95	15	10	4	3.23	90	10	6	4
3.9	85	10	7	2	3.24	75	10	8	4
3.10	90	12	6	3	3.25	100	20	10	7
3.11	85	10	5	2	3.26	90	10	8	5
3.12	75	8	5	3	3.27	80	7	5	3
3.13	100	15	9	4	3.28	95	10	8	5
3.14	80	10	7	4	3.29	96	12	7	1
3.15	85	7	5	2	3.30	89	13	5	2

4. Бір тәулік ішінде екі құрғақ жүк кемесі бір-біріне тәуелсіз кемежайға келіп, жүкті түсіруі тиіс. Олардың біреуіне жүкті түсіруге k_1 сағат, екіншісіне k_2 сағат уақыт кетеді. Олардың ешқайсысына жүкті түсіруде кезек күтуге тура келмейтін ықтималдық қандай?

№	k_1	k_2	№	k_1	k_2	№	k_1	k_2
4.1	2	5	4.11	4	3	4.21	5	7
4.2	2	6	4.12	4	4	4.22	5	8
4.3	2	7	4.13	4	5	4.23	6	3
4.4	2	8	4.14	4	6	4.24	6	6
4.5	3	3	4.15	4	7	4.25	6	7
4.6	3	5	4.16	4	8	4.26	6	8
4.7	3	6	4.17	5	3	4.27	7	7
4.8	3	7	4.18	5	4	4.28	7	8
4.9	3	8	4.19	5	5	4.29	8	8
4.10	4	2	4.20	5	6	4.30	8	6

5. Электр тізбегінің бөлігі екі блоктан тұрады. Бірінші блокта үш параллель сызық тиісінше k_1 , k_2 , k_3 элементтерін қамтиды, екінші блокта тиісінше m_1 және m_2 элементтері бар екі параллель сызықтар бар. Бірінші блоктың әрбір элементі үшін біраз уақыт мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығы (сенімділік) 0,9 құрайды, екінші блоктың әрбір элементі үшін 0,8. Жүйенің мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығын (сенімділігін) табыңыз.

№	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2	№	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2	№	k_1	k_2	k_3	m_1	m_2
5.1	1	1	1	1	1	5.11	2	2	2	1	2	5.21	3	1	1	2	2
5.2	1	1	1	1	2	5.12	2	2	2	2	2	5.22	2	1	1	1	1
15.3	1	1	1	2	2	5.13	1	1	3	1	1	5.23	2	1	1	1	2
5.4	1	1	2	1	1	5.14	1	1	3	1	2	5.24	2	1	1	2	2
5.5	1	1	2	1	2	5.15	1	1	3	2	2	5.25	1	3	1	1	1
5.6	1	1	2	2	2	5.16	1	2	1	1	1	5.26	1	3	1	1	2
5.7	1	2	2	1	1	5.17	1	2	1	1	2	5.27	1	3	1	2	2
5.8	1	2	2	1	2	5.18	1	2	1	2	2	5.28	1	1	1	1	1
5.9	1	2	2	2	2	5.19	3	1	1	1	1	5.29	1	1	1	1	2
5.10	2	2	2	1	1	5.20	3	1	1	1	2	5.30	1	1	1	2	2

6. Жинақтау бөліміне үш автоматтан тетіктер келіп түседі: n_1 бірінші автоматтан, n_2 екіншіден, n_3 үшіншіден ($\sum_i^3 n_i = 1000$). Бірінші автомат $m_1\%$ сапасыз тетік шығарады, екіншісі - $m_2\%$, үшіншісі - $m_3\%$.

а) жинақтау бөліміне сапасыз тетіктер түсу ықтималдығын табу керек;

б) жинақтау бөліміне сапасыз тетік түсті. Осы тетіктің i – ші автоматтан болу ($i=1,2,3$) ықтималдығын табу керек.

№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i	№	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3	i
6.1	520	220	5	8	7	1	6.16	100	250	7	8	5	1
6.2	270	410	10	5	9	2	6.17	430	180	5	4	7	2
6.3	250	140	8	7	4	2	6.18	170	540	6	5	8	3
6.4	190	380	5	9	30	1	6.19	650	120	10	9	8	2
6.5	290	610	6	3	3	2	6.20	400	180	7	10	5	1
6.6	270	430	10	6	4	2	6.21	120	380	10	6	9	2
6.7	280	360	7	10	9	1	6.22	270	340	9	5	4	3
6.8	520	110	5	7	10	1	6.23	430	120	10	7	6	2
6.9	240	290	9	8	4	3	6.24	360	120	5	10	8	1
6.10	310	410	7	2	5	3	6.25	420	210	8	7	6	1
6.11	520	110	3	6	7	2	6.26	370	130	10	6	5	2
6.12	280	310	9	8	4	2	6.27	410	200	5	10	8	3
6.13	400	320	4	5	8	1	6.28	280	510	10	6	5	3
6.14	350	240	9	8	7	1	6.29	710	120	2	10	4	3
6.15	190	520	5	2	4	3	6.30	460	240	5	9	7	1

7. n сынақ жүргізілді (a нұсқасы үшін $n=10$; b нұсқасы үшін $n=100$; c нұсқасы үшін $n=1000$), әрбір сынақта қандай да бір кездейсоқ оқиғаның пайда болу ықтималдығы p ға тең. Осы оқиғаның:

а) дәл k_1 рет (A оқиғасы) (a , b және c нұсқалары үшін);

б) k_1 -ден артық емес (B оқиғасы) (a және b нұсқалары үшін);

в) k_2 -ден кем емес (C оқиғасы) (a және b нұсқалары үшін);

г) ең болмағанда рет (D оқиғасы) (a нұсқасы үшін);

д) k_1 -ден k_2 -ге дейін (E оқиғасы) (b нұсқасы үшін)

пайда болу ықтималдығын табу керек.

№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p	№		k_1	k_2	p
7.1	a	2	5	0.9	7.11	a	4	6	0.5	7.21	a	2	6	0.3
	b	80	90			b	75	95			b	40	60	
	c	9		0.004		c	7		0.002		c	8		0.005
7.2	a	3	7	0.8	7.12	a	5	8	0.6	7.22	a	3	7	0.2
	b	85	95			b	20	60			b	35	70	
	c	8		0.005		c	5		0.006		c	4		0.009
7.3	a	4	8	0.7	7.13	a	3	8	0.7	7.23	a	4	7	0.3
	b	70	95			b	30	85			b	50	80	
	c	7		0.003		c	9		0.004		c	8		0.005
7.4	a	3	5	0.6	7.14	a	2	4	0.8	7.24	a	5	7	0.4
	b	60	95			b	40	75			b	40	65	
	c	4		0.006		c	6		0.007		c	4		0.008
7.5	a	2	7	0.5	7.15	a	4	9	0.9	7.25	a	3	5	0.5
	b	50	90			b	80	95			b	45	75	
	c	5		0.007		c	8		0.005		c	7		0.004
7.6	a	4	6	0.4	7.16	a	3	9	0.8	7.26	a	2	4	0.6
	b	65	75			b	50	95			b	30	80	
	c	6		0.002		c	6		0.003		c	9		0.004
7.7	a	5	9	0.3	7.17	a	1	3	0.7	7.27	a	2	8	0.7
	b	55	80			b	65	85			b	40	90	
	c	7		0.005		c	4		0.006		c	5		0.007
7.8	a	4	7	0.2	7.18	a	2	6	0.6	7.28	a	1	4	0.8
	b	40	80			b	50	70			b	25	70	
	c	9		0.008		c	7		0.009		c	9		0.002
7.9	a	2	8	0.3	7.19	a	2	4	0.5	7.29	a	4	7	0.9
	b	65	80			b	55	75			b	35	90	
	c	8		0.004		c	8		0.006		c	6		0.007
7.10	a	3	6	0.4	7.20	a	3	5	0.4	7.30	a	4	6	0.9
	b	20	85			b	45	80			b	10	60	
	c	5		0.003		c		4	0.008		c	4		0.009

8. Оқиғалар алгебрасын, ықтималдықтың классикалық немесе геометриялық анықтамаларын қолданып есептерді шығару керек

8.1 Құлыптың коды екі әртүрлі саннан тұрады. Кодты дұрыс теру ықтималдығы қандай?

8.2 Бірінші жәшікте 5 ақ және 10 қара шарлар, ал екіншісінде - 10 ақ және 5 қара шарлар бар. Әрбір жәшіктен бір- бір шардан алынды. Олардың ең болмағанда біреуі ақ болу ықтималдығын табу керек.

8.3 Бір торпеданың кемеге дәл тию ықтималдығы 0,5-ке тең. Егер кемені суға батыру үшін бір дәл тигізу жеткілікті болса, 3 торпеданың кемені суға батыру ықтималдығы қандай?

8.4 Қорапшада 10 қызыл және 6 көк түймелер бар. Кез келген ретпен екі түйме алынды. Олардың бір түсті болу ықтималдығы қандай?

8.5 Нысанаға бірінші мергеннің дөп тигізу ықтималдығы 0,7, екіншісі үшін — 0,95. Атқыштар бір мезгілде нысанаға атты. Олардың біреуі нысанаға дөп тию, ал екіншісінің жаңылу ықтималдығын табу керек.

8.6 Бірінші станокта жасалған бөлшектің бірінші сұрыпты болу ықтималдығы 0,7-ге тең, екінші станок үшін - 0,8. Бірінші станокта 2 бөлшек, екіншісінде 3 бөлшек жасалынды. Ең болмағанда бір станокта жасалынған барлық бөлшектердің бірінші сұрыпты болу ықтималдығын табу керек.

8.7 Қазақ алфавитінің 42 әріпі карточкаларға жазылған. Кез келген ретпен үш карточка алынады. Алынған карточкалар ашылып, алынған реті бойынша қойылады. «Той» сөзінің пайда болу ықтималдығын табу керек.

8.8 Цехта 7 ер адам және 3 әйел адам жұмыс істейді. Табельдік реті бойынша 3 адам таңдап алынды. Таңдап алынғандардың арасында ең болмағанда біреуі әйел болу ықтималдығын табу керек.

8.9 Партиядан тауар танушы жоғарғы сұрыпты өнімді таңдап алады. Кез келген ретпен алынған өнімнің жоғарғы сұрыпты болу ықтималдығы 0,8-ге тең. Тексерілген үш өнімнің тек екеуі жоғарғы сұрыпты болу ықтималдығын табу керек.

8.10 Кейбір физикалық шаманы бір рет өлшегенде қате кету ықтималдығы 0,4-ке тең. Тәуелсіз 3 өлшеу жүргізілді. Олардың тек біреуінде қате жіберілу ықтималдығын табу керек.

8.11 Екі зеңбіректен бірге бір рет атқанда нысанаға бір рет тию ықтималдығы 0,38-ге тең. Егер екінші зеңбірек үшін бұл ықтималдық 0,8-ге тең екендігі белгілі болса, бірінші зеңбіректен атылған бір оқ нысанаға дәл тию ықтималдығын табу керек.

8.12 Кітапхананың сөресінде кез келген ретпен 16 оқулық орналасқан, оның 5 физика оқулығы. Кітапханашы кез келген ретпен 3 оқулық алды. Оның ішінде ең болмағанда біреуі физика оқулығы болу ықтималдығын табу керек.

8.13 Үш ойын сүйегі лақтырылды. Түскен жақтың әрбіреуінде 5 ұпай болуының ықтималдығын табу керек.

8.14 Радиусы 10 болатын дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелектің ішіне кез келген 4 нүкте лақтырылды. 4 нүктенің барлығы да үшбұрыштың ішіне түсу ықтималдығын табу керек.

8.15 Радиусы 20 болатын дөңгелекке радиустары 6 см. және 8 см. болатын екі қиылыспайтын шеңберлер орналасқан. Үлкен дөңгелекке лақтырылған

нүктенің кіші шеңберлердің бірінінің ішіне түсу ықтималдығы қандай?

8.16 Құлыптың коды үш әртүрлі саннан тұрады. Кодты дұрыс теру ықтималдығы қандай?

8.17 Бірінші жәшікте 6 ақ және 12 қара шарлар, ал екіншісінде - 11 ақ және 5 қара шарлар бар. Әрбір жәшіктен бір бір шардан алынды. Олардың ең болмағанда біреуі ақ болу ықтималдығын табу керек.

8.18 Бір торпеданың кемеге дәл тию ықтималдығы 0,4-ке тең. Егер кемені суға батыру үшін бір дәл тигізу жеткілікті болса, 2 торпеданың кемені суға батыру ықтималдығы қандай?

8.19 Қорапшада 14 қызыл және 8 көк түймелер бар. Кез келген ретпен екі түйме алынды. Олардың бір түсті болу ықтималдығы қандай?

8.20 Нысанаға бірінші мергеннің дөп тигізу ықтималдығы 0,8, екіншісі үшін — 0,85. Атқыштар бір мезгілде нысанаға атты. Олардың біреуі нысанаға дөп тию, ал екіншісінің жаңылу ықтималдығын табу керек.

8.21 Бірінші станокта жасалған бөлшектің бірінші сұрыпты болу ықтималдығы 0,8-ге тең, екінші станок үшін - 0,9. Бірінші станокта 3 бөлшек, екіншісінде 2 бөлшек жасалынды. Екі станокта жасалынған барлық бөлшектердің бірінші сұрыпты болу ықтималдығын табу керек.

8.22 Қазақ алфавитінің 42 әріпі карточкаларға жазылған. Кез келген ретпен төрт карточка алынады. Алынған карточкалар ашылып, алынған реті бойынша қойылады. «Шарт» сөзінің пайда болу ықтималдығын табу керек.

8.23 Цехта 8 ер адам және 4 әйел адам жұмыс істейді. Табельдік реті бойынша 4 адам таңдап алынды. Таңдап алынғандар ер адам болу ықтималдығын табу керек.

8.24 Партиядан тауар танушы жоғарғы сұрыпты өнімді таңдап алады. Кез келген ретпен алынған өнімнің жоғарғы сұрыпты болу ықтималдығы 0,8-ге тең. Тексерілген үш өнімнің тек біреуі жоғарғы сұрыпты болу ықтималдығын табу керек.

8.25 Кейбір физикалық шаманы бір рет өлшегенде қате кету ықтималдығы 0,3-ке тең. Тәуелсіз 4 өлшеу жүргізілді. Олардың тек біреуінде қате жіберілу ықтималдығын табу керек.

8.26 Екі зеңбіректен бірге бір рет атқанда нысанаға бір рет тию ықтималдығы 0,4-ке тең. Егер екінші зеңбірек үшін бұл ықтималдық 0,7-ге тең екендігі белгілі болса, бірінші зеңбіректен атылған бір оқ нысанаға дәл тию ықтималдығын табу керек.

8.27 Кітапхананың сөресінде кез келген ретпен 15 оқулық орналасқан, оның 5 биология оқулығы. Кітапханашы кез келген ретпен 3 оқулық алды. Оның ішінде ең болмағанда біреуі биология оқулығы болу ықтималдығын табу керек.

8.28 Төрт ойын сүйегі лақтырылды. Түскен жақтың әрбіреуінде 6 ұпай болуының ықтималдығын табу керек.

8.29 Радиусы 12 болатын дөңгелекке дұрыс үшбұрыш іштей сызылған. Дөңгелектің ішіне кез келген 3 нүкте лақтырылды. 3 нүктенің барлығы да үшбұрыштың ішіне түсу ықтималдығын табу керек.

8.30 Радиусы 30 болатын дөңгелекке радиустары 5 см, 6 см. және 8 см болатын үш қиылыспайтын шеңберлер орналасқан. Үлкен дөңгелекке лақтырылған нүктенің кіші шеңберлердің бірінінің ішіне түсу ықтималдығы қандай?

1.3 Типтік варианттың шешуі

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ сандар жиыны берілген. Анықтау керек:

а) осы жиыннан үш таңбалы әртүрлі қанша санды құруға болады, әрбір санда цифрлар қайталанбайды;

б) осы жиыннан жеті таңбалы әртүрлі қанша санды құруға болады, әрбір санда цифрлар қайталанбайды;

в) берілген жиынның элементтерінен әртүрлі цифрлардан тұратын қанша үшэлементті ішкі жиын құруға болады;

Шешуі: бұл есепті шешуде комбинаториканың кейбір ұғымдары қолданылады. Комбинаторика – бұл математиканың бөлімі, жиі ақырлы жиынның элементтерін таңдау және орналастыру есептері шығарылады және осындай таңдаулар немесе берілген жиынның ішкі жиындар санын есептері де қарастырылады.

A - n элементтен тұратын ақырлы жиын болсын:

а) A жиынының n элементтен m бойынша *орналастыруы* деп A жиынының реттелген ішкі жиыны айтылады (кортеж, реттелген іріктеме таңдама), ол A жиынының әртүрлі m элементінен тұрады. Осындай орналастырулар саны A_n^m деп белгіленеді және келесі формуламен есептелінеді:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1);$$

б) A жиынының элементтерінің *орын ауыстыруы* деп осы элементтердің реттелген жиыны айтылады.

Сонымен орын ауыстыруға A жиынының барлық элементтері кіреді және олар бір бірінен орналасу ретімен ерекшеленеді.

n элементтен орын ауыстыру саны P_n деп белгіленеді және келесі формуламен есептелінеді:

$$P_n = n!;$$

в) A жиынының n элементтен m бойынша *теру* деп A жиынының m элементтен тұратын реттелмеген ішкі жиыны айтылады.

Осындай терулер саны C_n^m деп белгіленеді және келесі формуламен есептелінеді:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}.$$

Біздің есепті шешуге қайта оралайық:

а) Бірдей, бірақ санның әртүрлі ретімен құралған сандар әртүрлі болғандықтан, әрбір үш таңбалы сан берілген жиынның 7 цифрден 3 цифр бойынша орналастыру болады.

Сондықтан осындай орналастырулар саны келесі формуламен есептелінеді:

$$A_7^3 = |7 - 3 + 1 = 5| = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 ;$$

б) Әртүрлі жеті таңбалы сандар берілген жиынның барлық элементтерін қамтуы тиіс, ал элементтер, яғни цифрлар қайталанбауы тиіс. Осылайша, әрбір жеті таңбалы сан - осы жиынның жеті элементінің орын ауыстыруы болып табылады, ал мұндай орын ауыстырулардың саны $P_7 = 7!$ тең болады;

в) Берілген жиынның үш элементті ішкі жиыны оның үш түрлі элементінен құралады, элементтердің реті маңызды емес, сондықтан бұл ішкі жиындар терулер болады. Олардың саны келесі формуламен есептелінеді:

$$C_7^3 = \frac{A_7^3}{P_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 .$$

2. Урнада 10 шар бар, олардың арасында 3 ақ, 4 қара, 2 қызыл, 1 көк.

Анықтау керек:

а) кез келген түсті 5 шарды алудың қанша әдісі бар

б) қанша әдіспен 2 ақ, 2 қара, 1 қызыл, 0 көк шар алуға болады.

Шешуі: а) 10 шардың арасынан 5 шарды (түсі маңызды емес) таңдаудың мүмкін әдістер саны келесі формуламен есептелінеді:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} .$$

Атап өтелік, бұл теру саны формуласы кіші сандар берілгенде қолмен есептегенде қолайлы. Бөлшекті есептегенде бөлімінен бастаған жөн, себебі алымында көбейткіштер саны бөліміндегімен бірдей, яғни

$$C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dots = 252 .$$

б) Әр түсті шарлардың белгілі бір санын таңдағанда комбинаториканың келесі қолданамыз ережесі: n элементті жиынның s әртүрлі ішкі жиындары бар болсын, олар $n_1, n_2, \dots, n_s$ элементтерінен тұрсын ($\sum_{i=1}^s n_i = n$). Осы жиыннан мына сұлба бойынша іріктеу жүргізіледі: m_1 элементті n_1 элементтен, m_2 элементті n_2 элементтен, ..., m_s элементті n_s элементтен.

Сонда әрбір топтағы элементтердің ретін ескермей, $m_1, m_2, \dots, m_s$ элементтер топтарын қалыптастыру тәсілдерінің жалпы саны келесі формула бойынша анықталады

$$N = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_s}^{m_s}.$$

Біздің жағдайда ол сан: $C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^0 = 36$.

3. Лотереяда 120 билет бар, оның 40 ұтысты. Табу керек:

а) ұтысты билеттің қатысты жиілігін;

б) сатып алынған 20 билеттердің барлығы ұтысты болу ықтималдығын;

в) сатып алынған 20 билеттердің ішінде 9 ұтысты болу ықтималдығын;

г) сатып алынған 20 билеттердің ішінде ең болмағанда біреуі ұтысты болу ықтималдығын.

Шешуі:

а) A оқиғасының қатысты жиілігі деп (белгіленуі $P^*(A)$) A оқиғасы пайда болған m сынақ санының барлық сынақтың n жалпы санына қатынасы айтылады: $P^*(A) = m/n$.

A – ұтысты билет сатып алу оқиғасы болсын, сонда $P^*(A) = 40/120 = 1/3$;

б) және в) пункттерінде A оқиғасының ықтималдығының классикалық анықтамасын қолданамыз: $P(A) = m/n$, мұндағы m – A оқиғасының пайда болуына қолайлы сынақтар саны, n – сынақтардың жалпы саны;

б) A – сатып алынған 20 билеттердің барлығы ұтысты болу оқиғасы болсын. Жалпы элементар оқиғалар саны 120 билеттің ішінен 20 билет таңдап алудың әртүрлі жолдар санына тең, яғни $n = C_{120}^{20}$;

қолайлы сынақтар саны 40 ұтысты билет ішінен 20 билет алудың әртүрлі жолдар санына тең, яғни $m = C_{40}^{20}$. Сонымен,

$$P(A) = m/n = C_{40}^{20} / C_{120}^{20} = 4,679 \times 10^{-12};$$

в) A – кез келген ретпен сатып алынған 20 билеттің 9-ы ұтысты болу оқиғасы болсын. Жоғарыда айтылғандай, $n = C_{120}^{20}$;

m қолайлы сынақтар санын C_{40}^9 теруін әрбір C_{80}^{11} теруімен қиыстырылғанда аламыз, мұндағы C_{40}^9 теруі 40 ұтысты билеттің ішінен 9 ұтысты билетті таңдап алу санын береді, ал C_{80}^{11} теруі 80 ұтысты емес билеттің ішінен 11 ұтысты емес билетті таңдап алу санын береді, яғни $m = C_{40}^9 \cdot C_{80}^{11}$. Сонымен,

$$P(A) = m/n = C_{40}^9 \cdot C_{80}^{11} / C_{120}^{20} = 0,097.$$

г) A – сатып алынған 20 билеттердің ішінде ең болмағанда біреуі ұтысты болу оқиғасы болсын. Онда бұл оқиғаға қарама-қарсы оқиға $\bar{A}$ – сатып алынған 20 билеттердің ішінде бірде бір ұтысты билет болмайды. Есептің б) жағдайындағы сияқты бұл оқиғаның ықтималдығын

$$P(\bar{A}) = m/n = C_{80}^{20} / C_{120}^{20} = 1,2 \times 10^{-4}$$

формуласымен есептейміз. Сонда A оқиғасының ықтималдығы

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 1,2 \times 10^{-4} \approx 1.$$

Теру санын есептегенде Mathcad-та combin функциясы қолданылды. Төменде combin(Q,R) қолданушының C(Q,R) функциясы ретінде енгізілген файлдың көшірмесі келтірілген, ол Q мен R-дің кез келген мәндерінде

$$C(Q,R) := \text{combin}(Q,R),$$

$$\begin{aligned} C(120,20) &= 2.946 \times 10^{22}, & C(40,20) &= 1.378 \times 10^{11}, \\ C(40,9) &= 2.734 \times 10^8, & C(80,11) &= 1.048 \times 10^{13}, \\ \frac{C(40,9) \cdot C(80,11)}{C(120,20)} &= 0.097, & \frac{C(80,20)}{C(120,20)} &= 1.2 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

4. Бір тәулік ішінде екі құрғақ жүк кемесі бір-біріне тәуелсіз кемежайға келіп, жүкті түсіріуі тиіс. Олардың біреуіне жүкті түсіруге 8 сағат уақыт кетеді, екіншісіне 6 сағат. Олардың ешқайсысына жүкті түсіруде кезек күтуге тура келмейтін ықтималдық қандай?

Шешуі:

x, y – бірінші және екінші құрғақ жүк кемелерінің жүкті түсіруге жақындаған сәттері болсын.

Кездейсоқ оқиғаны белгілейік: A - құрғақ жүк кемелерінің ешқайсысы түсіруді кезек күтуге тиіс емес, яғни олардың кездесуі болмайды. құрғақ жүк кемелерінің жүк түсіруге жақындау сәттері мынадай шарттарға жауап беруі тиіс:

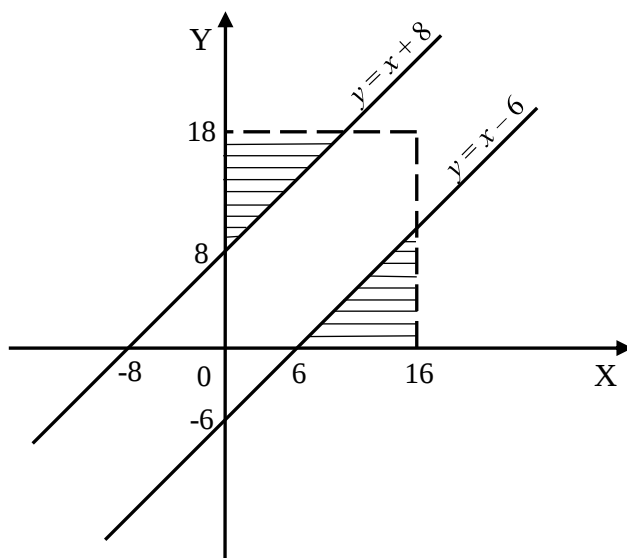
$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 24 - 8 = 16, 0 \leq y \leq 24 - 6 = 18\}.$$

Ω –элементар оқиғалар кеңістігі. Кездесу болмау үшін келесі шарт орындалу керек: $A = \{(x, y) | x - y > 6 \text{ және } y - x > 8\}$, $P(A)=?$

Егер x және y – жазықтықтағы тік бұрышты координаттар болса, онда Ω – қабырғалары 16 және 18 болатын тіктөртбұрыш, $S_{\Omega} = 16 \cdot 18 = 288$.

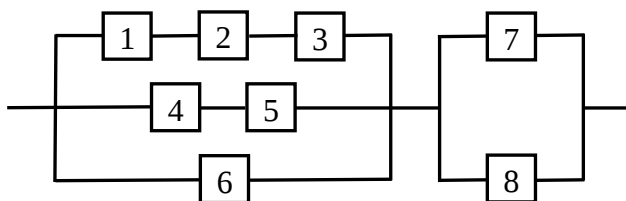
A облысы бұл $x - y > 6$ және $y - x > 8$ шартын қанағаттандыратын тіктөртбұрыштың нүктелері, яғни $y - x = 8$ түзуінен жоғары, $x - y = 6$ түзуінен төмен (штрихталған облыс).

$$S_A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10\right) = 100. \quad P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{100}{288} \approx 0,347.$$



5. Электр тізбегінің бөлігі екі блоктан (жүйе) тұрады. Бірінші блокта үш параллель сызық тиісінше 3, 2, 1 элементтерін қамтиды, екінші блокта тиісінше 1 және 1 элементтері бар екі параллель сызықтар бар. Бірінші блоктың әрбір элементі үшін біраз уақыт мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығы (сенімділігі) 0,9 құрайды, екінші блоктың әрбір элементі үшін 0,8. Жүйенің мүлтіксіз жұмыс істеу ықтималдығын (сенімділігін) табыңыз.

Шешуі: A – жүйенің мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғасы болсын, A_i – i -ші элементтің мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғалары, B_1, B_2 – безотказная работа бірінші және екінші блоктардың мүлтіксіз жұмыс істеу оқиғалары. Есептің шартына сүйенсек, электр тізбегінің бұл бөлігі мынадай түрде болады:



Әрине, егер $A = B_1 \cdot B_2$ болса, жүйе жұмыс істейді, яғни ток жүреді мұндағы $B_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_4 \cdot A_5 + A_6$, ал $B_2 = A_7 + A_8$. Блоктар бір бірінен тәуелсіз істен шығатын болғандықтан, $P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2)$.

Блоктардың ықтималдықтарын жеке қарастырайық.

Белгілеу енгізейік: $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = C_1$ ал $A_4 \cdot A_5 = C_2$, онда $P(B_1) = P(C_1 + C_2 + A_6)$.

C_1, C_2, A_6 – үйлесімді оқиғалар болғандықтан,

$$P(C_1 + C_2 + A_6) = P(C_1) + P(C_2) + P(A_6) - P(C_1 C_2) - P(C_1 A_6) - P(C_2 A_6) + P(C_1 C_2 A_6),$$

Мұндай жағдайда қарама - қарсы оқиғаларға көшкен жөн.

$P(\overline{B_1})=1-P(\overline{C_1} \cdot \overline{C_2} \cdot \overline{A_6})$, барлық элементтер бір бірінен тәуелсіз істен шығатын болғандықтан,

$$\begin{aligned} P(\overline{B_1}) &= 1 - P(\overline{C_1})P(\overline{C_2})P(\overline{A_6}), = 1 - [(1 - P(C_1))(1 - P(C_2)(1 - P(A_6))]= \\ &= 1 - [(1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3))(1 - P(A_4)P(A_5))(1 - P(A_6)) = 1 - (1 - 0,9^3)(1 - 0,9^2)(1 - 0,9) = \\ &= 0,994851 \approx 0,99. \end{aligned}$$

Осыған ұқсас тұжырымдасақ:

$$P(B_2) = P(A_7 + A_8) = P(A_7) + P(A_8) - P(A_7 A_8) = 0,8 + 0,8 - 0,8 \cdot 0,8 = 0,96.$$

$P(B_2)$ табу үшін жоғарыдағыдай қарама - қарсы оқиғаларға көшуге болар еді. Сонымен,

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) = 0,99 \cdot 0,96 = 0,9504.$$

6. Жинақтау бөліміне үш автоматтан тетіктер келіп түседі: $n_1 = 100$ бірінші автоматтан, $n_2 = 300$ екіншіден, $n_3 = 1000 - n_1 - n_2 = 600$ үшіншіден ($\sum_i^3 n_i = 1000$). Бірінші автомат 5% сапасыз тетік шығарады, екіншісі - 4%, үшіншісі - 6%.

а) Жинақтау бөліміне сапасыз тетіктер түсу ықтималдығын табу керек;

б) Жинақтау бөліміне сапасыз тетік түсті. Осы тетіктің екінші автоматтан болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі: A – жинақтау бөліміне сапасыз тетіктер түсу оқиғасы болсын, ал B_1, B_2, B_3 – тетік сәйкес бірінші, екінші, үшінші автоматтан келіп түскен оқиғалары болсын (бұл оқиғалар гипотезалар деп аталады).

а) A оқиғасының ықтималдығы толық ықтималдықтар формуласымен есептелінеді:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3),$$

мұндағы $P(A/B_i)$ – сатып алынған тетік i –ші автоматтан келіп түскен оқиғасының шартты ықтималдығы ($i=1,2,3$). Есептің шарты бойынша:

$$P(B_1) = 100/1000 = 0,1;$$

$$P(B_2) = 300/1000 = 0,3;$$

$$P(B_3) = 600/1000 = 0,6;$$

$$P(A/B_1) = 0,05;$$

$$P(A/B_2) = 0,04;$$

$$P(A/B_3) = 0,06.$$

$$\text{Сондықтан } P(A) = 0,1 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,6 \cdot 0,06 = 0,053;$$

б) бұл пунктте $P(B_2/A)$ шартты ықтималдығын табу керек. Ол үшін Байес формуласын қолданамыз:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A/B_k)}, i=1,2,...,n,$$

біздің есеп үшін ол былай жазылынады:

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)} = \frac{0,3 \cdot 0,04}{0,053} = 0,226.$$

7. n сынақ жүргізілді (a нұсқасы үшін $n=10$; b нұсқасы үшін $n=100$; c нұсқасы үшін $n=1000$), әрбір сынақта қандай да бір кездейсоқ оқиғаның пайда болу ықтималдығы p ға тең. Осы оқиғаның:

- а) дәл k_1 рет (A оқиғасы) (a , b және c нұсқалары үшін);
- б) k_1 -ден артық емес (B оқиғасы) (a және b нұсқалары үшін);
- в) k_2 -ден кем емес (C оқиғасы) (a және b нұсқалары үшін);
- г) ең болмағанда рет (D оқиғасы) (a нұсқасы үшін);
- д) k_1 -ден k_2 -ге дейін (E оқиғасы) (b нұсқасы үшін)

пайда болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі: n сынақта кездейсоқ шама k рет кездесетін ықтималдық $P_n(k)$ арқылы белгіленеді. Есептің шартына қарай оның шешімі де алуан түрлі болады:

а) $n = 10$, $k_1 = 2$, $k_2 = 9$ болсын. Бұл жерде n үлкен емес, сондықтан A оқиғасының ықтималдығын Бернуллі формуласымен дәл табуға болады:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

мұндағы $q = 1 - p$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n$).

В және С оқиғаларының ықтималдығы ықтималдықтардың қосындысы ретінде анықталады:

$$P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$$

– бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен артық емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе 0 рет, немесе 1 рет, ..., немесе k рет;

$$P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$$

– бұл n тәуелсіз оқиғалар арасынын k реттен кем емес пайда болу оқиғаларының ықтималдығы, яғни немесе k рет, немесе $k+1$ рет, ..., немесе n рет;

Бұл оқиғалар коммулятивті (жинақталған) деп аталады. Сонымен,

$$а) P(A) = P_{10}(9) = C_{10}^9 0,8^9 0,2^1 = 0,268;$$

$$\text{б) } P(B) = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) = 0,000078;$$

$$\text{в) } P(C) = P_{10}(9) + P_{10}(10) = 0,376;$$

г) D оқиғасына қарама қарсы $\bar{D}$ оқиғасын енгіземіз. $\bar{D}$ – бұл 10 тәуелсіз сынықтарда кейбір оқиғаның мүлдем пайда болмауы. Онда

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P_{10}(0) \approx 1;$$

Төменде Mathcad жүйесінде есептеу файлдың көшірмесі келтірілген:

$$\underline{C}(Q,R) := \text{combin}(Q,R),$$

$$C(10,2) \cdot 0.8^2 \cdot 0.2^8 = 7.373 \times 10^{-5};$$

$$C(10,9) \cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 + C(10,10) \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^0 = 0.376;$$

$$C(10,0) \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^{10} + C(10,1) \cdot 0.8^1 \cdot 0.2^9 + C(10,2) \cdot 0.8^2 \cdot 0.2^8 = 7.793 \times 10^{-5};$$

$$1 - C(10,0) \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^{10} = 1;$$

$$\text{б) } n=100, k_1=70, k_2=80 \text{ болсын.}$$

Тәуелсіз тәжірибелер саны n үлкен болғандықтан, қандай да бір оқиғаның n тәжірибеде k рет пайда болу ықтималдығы $P_n(k)$ Муавр-Лаплас аймақтық теоремасымен есептелінеді және жуық шамамен келесі формуламен есептелінеді:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

$$\text{мұндағы } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \quad (\text{осы}$$

функцияның мәнін кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі dnorm функциясы арқылы табады).

B , C және D оқиғаларының ықтималдығын анықтау үшін Муавр-Лаплас интегралдық теоремасын қолданады: қандай да бір оқиғаның пайда болу k саны k_1 -ден k_2 -ге дейінгі аралығында болу ықтималдығы $P_n(k_1, k_2)$ жуық шамамен тең:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{мұндағы} \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt$ - Лаплас функциясы, оның мәні арнайы кестеден немесе Mathcad жүйесіндегі pnorm функциясы арқылы табылады.

$$\text{а) } P(A) = P_{100}(80) \cong \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \varphi(2.5) = 0.018/4 = 0.0045; \quad x = \frac{70 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -2.5;$$

$$\text{б) } P(B) = P_{100}(k \leq 70) = P_{100}(0,70) \approx \Phi(x_1) - \Phi(x_4) = 0,006; \quad x_1 = -2,5, \quad x_4 = -20;$$

$$\text{в) } P(C) = P_{100}(k \geq 80) = P_{100}(80,100) \approx \Phi(x_3) - \Phi(x_2) = 0,5; \quad x_3 = 5;$$

$$\text{д) } P(E) = P_{100}(70,80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,494, \quad x_2 = 0.$$

Төменде Mathcad жүйесінде есептеу файлдың көшірмесі келтірілген:

$$n := 100, \quad k1 := 70, \quad k2 := 80,$$

$$p := 0.8, \quad q := 1 - p,$$

$$x1 := \frac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x2 := \frac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x3 := \frac{n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x4 := \frac{0 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

$$x1 = -2.5, \quad x2 = 0, \quad x3 = 5, \quad x4 = -20$$

$$\text{pnorm}(x2, 0, 1) - \text{pnorm}(x1, 0, 1) = 0.494, \quad \text{dnorm}(x1, 0, 1) = 0.018$$

$$\text{pnorm}(x3, 0, 1) - \text{pnorm}(x2, 0, 1) = 0.5,$$

$$\text{pnorm}(x1, 0, 1) - \text{pnorm}(x4, 0, 1) = 6.21 \times 10^{-3},$$

или другой вариант

$$\Phi(x) := \text{pnorm}(x, 0, 1) - 0.5,$$

$$P(k1, k2) := \Phi(x2) - \Phi(x1).$$

$$\Phi(x1) = -0.494, \quad \Phi(x2) = 0,$$

$$P(k1, k2) = 0.494,$$

$$\Phi(x3) = 0.5, \quad \Phi(x4) = -0.5,$$

$$\Phi(x3) - \Phi(x2) = 0.5, \quad \Phi(x1) - \Phi(x4) = 6.21 \times 10^{-3}.$$

с) $n=1000$, n үлкен, p - аз, ал олардың көбейтіндісі $\lambda = n \cdot p$ - кіші сан болғандықтан, n тәуелсіз сынақта кездейсоқ шама k рет кездесетін $P_n(k)$ ықтималдықты анықтау үшін Бернулли формуласының орнына Пуассон формуласын қолдануға болады: $P_n(k) \approx \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$.

Біздің есепте $n=1000$, $k=6$, $p=0,003$, $\lambda = 1000 \cdot 0,003 = 3$, сондықтан $P_{1000}(6) = 3^6 \cdot e^{-3} / 6! = 0,05$.

Есептеулер жүргізгенде функция мәндерінің кестесін қолдануға болады $p(k, \lambda) = \lambda^k \cdot e^{-\lambda} / k!$, ол кейбір оқулықтарда беріледі немесе Mathcad-тағы `dpois` функциясын қолданса да болады. Төменде Mathcad жүйесінде есептеу файлдың көшірмесі келтірілген:

$$p(k, \lambda) := \text{dpois}(k, \lambda),$$

$$p(6, 3) = 0.05.$$

2 Есептік-сызба жұмыс №2. Кездейсоқ шамалар

Мақсаты: үлестірім заңдарымен, дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамаларымен, кездейсоқ шамалардың негізгі заңдарымен таныстыру.

2.1 Теориялық сұрақтар

1 Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңы.

2 Интегралдық үлестірім функциясы (үлестірім функциясы).

3 Дифференциалдық үлестірім функциясы (үлестірім тығыздығы).

4 Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың математикалық үміті (күтімі).

5 Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалардың дисперсиясы және орта квадраттық ауытқуы.

6 Биномдық үлестірім, Пуассон үлестірімі.

7 Бірқалыпты және көрсеткіштік үлестірім, сенімділік функциясы.

8 Қалыпты үлестірім.

9 Шектік теоремалар туралы ұғым. Үлкен сандар заңы, орталық шектік теорема.

2.2 Есептік тапсырмалар

1. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген. Үлестірім көпмүшелігін құру керек. Табу керек:

а) оның үлестірім функциясын $F(x)$, оның графигін салу керек;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;

в) X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

	X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a	b
	P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6		
1.1	X	0	1	2	4	6	9	-2	7
	P	0.05	0.15	0.3	0.25	0.15	0.1		
1.2	X	-3	-2	-1	0	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.02	0.14	0.18	0.21		
1.3	X	1	2	3	5	7	8	-3	6
	P	0.3	0.14	0.16	0.1	0.2	0.1		
1.4	X	-4	-3	-2	0	1	2	0	1
	P	0.2	0.08	0.23	0.27	0.12	0.1		
1.5	X	1	2	4	5	7	9	3	8
	P	0.19	0.21	0.06	0.14	0.12	0.28		

1.6	X	-1	0	2	3	5	7	-4	4
	P	0.26	0.14	0.07	0.2	0.03	0.3		
1.7	X	-2	-1	0	3	5	7	1	6
	P	0.18	0.09	0.01	0.2	0.22	0.3		
1.8	X	1	2	4	5	6	8	0	6
	P	0.3	0.17	0.13	0.1	0.2	0.1		
1.9	X	1	2	3	4	7	9	5	8
	P	0.11	0.29	0.06	0.14	0.17	0.23		
1.10	X	0	1	2	3	7	9	4	8
	P	0.06	0.14	0.3	0.25	0.15	0.1		
1.11	X	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
	P	0.15	0.3	0.01	0.14	0.19	0.21		
1.12	X	-1	0	3	5	7	8	1	6
	P	0.25	0.14	0.16	0.1	0.2	0.15		
1.13	X	-4	-3	-2	0	2	4	-1	3
	P	0.2	0.07	0.24	0.26	0.13	0.1		
1.14	X	-3	-1	0	3	4	7	-2	6
	P	0.12	0.09	0.01	0.2	0.28	0.3		
1.15	X	-1	0	1	3	7	8	2	6
	P	0.26	0.14	0.15	0.2	0.1	0.15		
1.16	X	-2	-1	0	1	2	7	-3	5
	P	0.17	0.09	0.01	0.3	0.23	0.2		
1.17	X	1	2	3	5	6	7	0	4
	P	0.1	0.14	0.16	0.1	0.2	0.3		
1.18	X	-3	-1	0	3	5	6	-2	4
	P	0.16	0.09	0.01	0.3	0.24	0.2		
1.19	X	1	2	5	6	7	8	3	6
	P	0.2	0.15	0.15	0.1	0.3	0.1		
1.20	X	-1	0	2	4	7	8	1	5
	P	0.23	0.18	0.12	0.2	0.1	0.17		
1.21	X	1	2	4	5	6	8	0	7
	P	0.3	0.14	0.16	0.03	0.2	0.17		
1.22	X	-4	-3	-1	0	1	3	-2	2
	P	0.2	0.03	0.24	0.26	0.17	0.1		
1.23	X	1	2	3	4	7	9	0	8
	P	0.17	0.23	0.09	0.11	0.12	0.28		
1.24	X	0	1	3	5	7	8	2	6
	P	0.2	0.14	0.16	0.12	0.3	0.08		
1.25	X	-5	-3	-2	0	1	3	-4	2
	P	0.2	0.06	0.21	0.29	0.14	0.1		
1.26	X	1	2	3	5	8	9	4	7
	P	0.18	0.22	0.05	0.15	0.12	0.28		
1.27	X	1	3	4	5	7	8	2	6

	P	0.3	0.16	0.14	0.01	0.2	0.19		
1.28	X	-5	-3	-1	0	1	3	-4	2
	P	0.1	0.03	0.14	0.36	0.17	0.2		
1.29	X	0	2	3	4	6	8	1	7
	P	0.26	0.14	0.05	0.15	0.12	0.28		
1.30	X	-1	0	2	3	7	8	1	6
	P	0.21	0.16	0.14	0.1	0.2	0.19		

2. Урнада m ақ және k қара шарлар бар. Шарларды біртіндеп қара шар пайда болғанша (қайтарымсыз) алады. X – қара шар пайда болғанша алынған шарлар саны болсын. X үлестірім заңын, оның математикалық үмітін және модасын табу керек.

№	m	k	№	m	k	№	m	k
2.1	2	3	2.11	4	2	2.21	3	3
2.2	2	4	2.12	4	3	2.22	3	8
2.3	2	5	2.13	4	5	2.23	3	9
2.4	2	6	2.14	4	6	2.24	3	10
2.5	2	7	2.15	4	7	2.25	4	9
2.6	3	2	2.16	2	8	2.26	4	4
2.7	3	4	2.17	2	2	2.27	4	8
2.8	3	5	2.18	2	9	2.28	2	6
2.9	3	6	2.19	2	10	2.29	4	10
2.10	3	7	2.20	4	10	2.30	3	2

3. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім функциясымен $F(x)$ берілген. Табу керек:

- оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;
 - математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;
 - X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.
- $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

	$F(x)$	a	b		$F(x)$	a	b
3.1	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{x^2}{25}, 0 < x \leq 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$	1	4	3.16	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{x^2}{49}, 0 < x \leq 7 \\ 1, x > 7 \end{cases}$	4	5
3.2	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9}, 0 < x \leq 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$	1	2	3.17	$\begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, 1 < x \leq 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$	0	1,5

3.3	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ x^3, 0 < x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$	0,5	1	3.18	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ x^2, 0 < x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$	0,2	0,9
3.4	$\begin{cases} 0, x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$	$-\frac{\pi}{4}$	π	3.19	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \sin x, 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
3.5	$\begin{cases} 0, x \leq 3 \\ (x-3)^2, 3 < x \leq 4 \\ 1, x > 4 \end{cases}$	2	4	3.20	$\begin{cases} 0, x \leq 3 \\ 0,25(x-3)^2, 3 < x \leq 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$	0	4
3.6	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \sqrt{2} \sin x, 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	3.21	$\begin{cases} 0, x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos 2x, \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
3.7	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 4x^2 + 3x, 0 < x \leq \frac{1}{4} \\ 1, x > \frac{1}{4} \end{cases}$	0,1	0,2	3.22	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 3x^2 + 2x, 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ 1, x > \frac{1}{3} \end{cases}$	0,1	0,5
3.8	$\begin{cases} 0, x \leq 2 \\ 0,25(x-2)^2, 2 < x \leq 4 \\ 1, x > 4 \end{cases}$	3	4	3.23	$\begin{cases} 0, x \leq 5 \\ (x-5)^2, 5 < x \leq 6 \\ 1, x > 6 \end{cases}$	5,5	6
3.9	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{x^2}{36}, 0 < x \leq 6 \\ 1, x > 6 \end{cases}$	1	5	3.24	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4}, 0 < x \leq 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$	1	2
3.10	$\begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \frac{(x-1)^2}{16}, 1 < x \leq 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$	3	4	3.25	$\begin{cases} 0, x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^2}{25}, 2 < x \leq 7 \\ 1, x > 7 \end{cases}$	3	6
3.11	$\begin{cases} 0, x \leq 6 \\ \frac{(x-6)^2}{4}, 6 < x \leq 8 \\ 1, x > 8 \end{cases}$	5	7	3.26	$\begin{cases} 0, x \leq 7 \\ (x-7)^2, 7 < x \leq 8 \\ 1, x > 8 \end{cases}$	7,5	8

3.12	$\begin{cases} 0, x \leq 5 \\ \frac{(x-5)^2}{9}, 5 < x \leq 8 \\ 1, x > 8 \end{cases}$	4	7	3.27	$\begin{cases} 0, x \leq 4 \\ \frac{(x-4)^2}{9}, 4 < x \leq 7 \\ 1, x > 7 \end{cases}$	5	6
3.13	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 2\sin x, 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \\ 1, x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	3.28	$\begin{cases} 0, x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ 1, x > \pi \end{cases}$	0	$\frac{3\pi}{4}$
3.14	$\begin{cases} 0, x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 2x}{3}, 2 < x \leq 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$	2,5	3	3.29	$\begin{cases} 0, x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{6}, 1 < x \leq 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$	1	2
3.15	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 5x^2 + 4x, 0 < x \leq \frac{1}{5} \\ 1, x > \frac{1}{5} \end{cases}$	0	0,1	3.30	$\begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \sin 2x, 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$

4. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығымен $f(x)$ берілген. Табу керек:

а) оның $F(x)$ үлестірім функциясын;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X -тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

	$f(x)$	a	b		$f(x)$	a	b
4.1	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 4 \\ \frac{x}{8}, 0 < x \leq 4 \end{cases}$	1	3	4.16	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 3 \\ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{3}\right), 0 < x \leq 3 \end{cases}$	-1	2
4.2	$\begin{cases} 0, x \leq -3, x > -2 \\ \frac{6}{x^2}, -3 < x \leq -2 \end{cases}$	-2,5	0	4.17	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 4\sin 2x, 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
4.3	$\begin{cases} 0, x \leq -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2} \\ 0,5\cos x, -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{4}$	4.18	$\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 2 \\ \frac{2}{x^2}, 1 < x \leq 2 \end{cases}$	0	1,5

4.4	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 1 \\ \frac{4}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \leq 1 \end{cases}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	4.19	$\begin{cases} 0, x \leq 2, x > 3 \\ \frac{2x}{5}, 2 < x \leq 3 \end{cases}$	1	2,5
4.5	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 3/4 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x \leq 3/4 \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	4.20	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\pi(1+x^2)}, 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	0,1	1
4.6	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \pi \\ 0,5\sin x, 0 < x \leq \pi \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{2}$	4.21	$\begin{cases} 0, x \leq -1, x > 2 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, -1 < x \leq 2 \end{cases}$	0	1
4.7	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 2 \\ \frac{x+2}{6}, 0 < x \leq 2 \end{cases}$	1	2	4.22	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{6}{\pi\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$	$\frac{1}{4}$	1
4.8	$\begin{cases} 0, x \leq 4, x > 5 \\ \frac{2x}{9}, 4 < x \leq 5 \end{cases}$	3	4,5	4.23	$\begin{cases} 0, x \leq 3, x > 5 \\ \frac{7,5}{x^2}, 3 < x \leq 5 \end{cases}$	2	4
4.9	$\begin{cases} 0, x \leq \frac{\pi}{2}, x > \frac{5\pi}{6} \\ -2\cos x, \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	4.24	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 6\sin 3x, 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{12}$
4.10	$\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 2 \\ 3(x-1)^2, 1 < x \leq 2 \end{cases}$	1,5	2	4.25	$\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 2 \\ 2x-2, 1 < x \leq 2 \end{cases}$	0	1,5
4.11	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{4} \\ 2\cos 2x, 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	4.26	$\begin{cases} 0, x \leq -2, x > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, -2 < x \leq 2 \end{cases}$	0	1
4.12	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 4 \\ \frac{1}{2}(1-\frac{x}{4}), 0 < x \leq 4 \end{cases}$	1	3	4.27	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 5 \\ \frac{2}{5}(1-\frac{x}{5}), 0 < x \leq 5 \end{cases}$	1	4
4.13	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 2 \\ \frac{x+1}{4}, 0 < x \leq 2 \end{cases}$	-1	1	4.28	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{6} \\ 3\cos 3x, 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$
4.14	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > 1 \\ 3x^2, 0 < x \leq 1 \end{cases}$	0,2	1,2	4.29	$\begin{cases} 0, x \leq -3, x > 3 \\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{9-x^2}, -3 < x \leq 3 \end{cases}$	0	2
4.15	$\begin{cases} 0, x \leq 0, x > \frac{\pi}{3} \\ 2\sin x, 0 < x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$	0	$\frac{\pi}{6}$	4.30	$\begin{cases} 0, x \leq 1, x > 4 \\ \frac{2x}{15}, 1 < x \leq 4 \end{cases}$	2	3

5. Биномдық үлестірім (a нұсқа). Пуассон үлестірімі (b нұсқа).

Өнім N элементтен тұрады. Қандай да бір уақыт аралығында бір элементтің істен шығу ықтималдығы p -ға тең және қалған элементтің жағдайларынан тәуелсіз. Істен шыққан элементтер санының (X кездейсоқ шамасы) үлестірім заңын құрыңыз.

a нұсқасы үшін осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын және орта квадраттық ауытқуын табу керек;

b нұсқасы үшін көрсетілген уақытта m -нен кем емес элементтің істен шығу ықтималдығын табыңыз.

№	N		p	m	№	N		p	m	№	N		p	m
5.1	a	3	0.1		5.11	a	4	0.15		5.21	a	3	0.11	
	b	2000	0.001	4		b	1500	0.005	6		b	1000	0.005	6
5.2	a	2	0.12		5.12	a	5	0.13		5.22	a	2	0.16	
	b	1000	0.007	5		b	4000	0.006	2		b	4500	0.003	2
5.3	a	4	0.2		5.13	a	3	0.14		5.23	a	4	0.29	
	b	3000	0.004	7		b	8000	0.001	2		b	2000	0.001	4
5.4	a	5	0.25		5.14	a	2	0.2		5.24	a	5	0.1	
	b	2000	0.002	5		b	6500	0.002	6		b	1000	0.007	5
5.5	a	3	0.3		5.15	a	4	0.27		5.25	a	3	0.17	
	b	1000	0.005	6		b	3000	0.005	2		b	3000	0.004	7
5.6	a	2	0.1		5.16	a	5	0.2		5.26	a	2	0.21	
	b	5000	0.001	2		b	1500	0.002	3		b	2000	0.002	5
5.7	a	4	0.15		5.17	a	3	0.19		5.27	a	4	0.22	
	b	2000	0.001	4		b	2000	0.001	4		b	1000	0.005	6
5.8	a	5	17		5.18	a	2	23		5.28	a	5	24	
	b	1000	0.008	5		b	1000	0.007	5		b	6500	0.007	8
5.9	a	3	12		5.19	a	4	11		5.29	a	3	18	
	b	3000	0.004	7		b	3500	0.002	1		b	7000	0.002	6
5.10	a	2	15		5.20	a	5	28		5.30	a	2	22	
	b	2000	0.003	2		b	2000	0.001	5		b	5500	0.004	9

6. Бірқалыпты үлестірім.

a нұсқасы.

Өлшегіш құралы бірнеше бөлікке бөлінген, әрбір бөліктің бағасы k -ға тең. Құралдың көрсеткіші жақын бүтін бөлікке дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтау қателігі.

b нұсқасы.

Қайбір маршруттың троллейбустары кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы k минут. X кездейсоқ шамасы – троллейбусты күту уақыты.

Табу керек:

а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

- в) математикалық үмітін, дисперсиясын;
 г) есептегенде m -нен кем (артық) қате кету ықтималдығын (a нұсқасы үшін);
 д) аялдамаға келген жолаушы троллейбусты m минуттен кем (артық) күту ықтималдығын (b нұсқасы үшін).
 $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

№	k		m	№	k		m	№	k		m
6.1	a	0,2	0,04	6.11	a	0,3	0,08	6.21	a	0,9	0,02
	b	5	3		b	18	9		b	19	8
6.2	a	0,3	0,02	6.12	a	0,6	0,01	6.22	a	0,1	0,08
	b	10	4		b	24	8		b	20	5
6.3	a	0,1	0,06	6.13	a	0,9	0,06	6.23	a	0,7	0,01
	b	15	5		b	6	3		b	25	5
6.4	a	0,5	0,01	6.14	a	0,5	0,05	6.24	a	0,4	0,06
	b	6	2		b	12	6		b	9	3
6.5	a	0,6	0,05	6.15	a	0,8	0,07	6.25	a	0,5	0,07
	b	20	10		b	16	8		b	14	7
6.6	a	0,9	0,02	6.16	a	0,2	0,04	6.26	a	0,3	0,08
	b	19	8		b	5	3		b	18	9
6.7	a	0,1	0,08	6.17	a	0,3	0,02	6.27	a	0,6	0,01
	b	20	5		b	10	4		b	24	8
6.8	a	0,7	0,01	6.18	a	0,1	0,06	6.28	a	0,9	0,06
	b	25	5		b	15	5		b	6	3
6.9	a	0,4	0,06	6.19	a	0,5	0,01	6.29	a	0,5	0,05
	b	9	3		b	6	2		b	12	6
6.10	a	0,5	0,07	6.20	a	0,6	0,05	6.30	a	0,8	0,07
	b	14	7		b	20	10		b	16	8

7. Көрсеткіштік үлестірім.

Элементтің мүлтіксіз жұмыс уақыты (T кездейсоқ шамасы) λ параметрімен көрсеткішті үлестірілген, мұндағы λ - істен шығу интенсивтілігі, яғни бірлік уақыт ішіндегі істен шығудың орта саны. Табу керек:

- а) $f(t)$ үлестірім тығыздығын;
 б) $F(t)$ үлестірім функциясын, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
 в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
 г) математикалық үмітін, дисперсиясын;
 д) элементтің t уақыт ішінде істен шығу ықтималдығын және элементтің t уақыт ішінде істен шықпау ықтималдығын.
 $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

№	λ	t	№	λ	t	№	λ	t
7.1	1	5	7.11	2	5	7.21	3	8
7.2	2	10	7.12	3	10	7.22	4	4
7.3	3	6	7.13	4	6	7.23	6	3
7.4	4	8	7.14	6	8	7.24	7	2
7.5	6	4	7.15	7	4	7.25	8	1
7.6	7	3	7.16	8	3	7.26	9	10
7.7	8	2	7.17	9	2	7.27	10	6
7.8	9	1	7.18	10	1	7.28	1	7
7.9	10	7	7.19	1	10	7.29	2	8
7.10	1	9	7.20	2	6	7.30	3	2

8. Қалыпты үлестірім заңы.

Өлшеудің кездейсоқ қатесі (X кездейсоқ шамасы) a және σ параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады. Табу керек:

- а) $f(x)$ үлестірім тығыздығын;
- б) $F(x)$ үлестірім функциясын;
- в) математикалық үмітін, дисперсиясын;
- г) $(\alpha; \beta)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша δ -дан аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

№	a	σ	α	β	δ	№	a	σ	α	β	δ
8.1	10	1	8	14	2	8.16	10	2	9	14	2
8.2	12	2	7	14	3	8.17	12	4	5	14	3
8.3	14	3	10	15	5	8.18	14	1	9	15	5
8.4	11	5	9	12	3	8.19	11	6	8	12	3
8.5	13	2	6	13	2	8.20	13	4	6	17	2
8.6	12	3	7	15	4	8.21	12	9	8	15	4
8.7	10	2	8	17	2	8.22	10	3	6	17	2
8.8	12	4	6	14	6	8.23	12	5	6	13	6
8.9	14	6	11	19	5	8.24	14	2	12	19	5
8.10	15	5	8	12	3	8.25	15	3	4	12	3
8.11	17	4	6	14	2	8.26	17	1	5	14	2
8.12	12	5	7	18	4	8.27	12	4	9	18	4
8.13	18	5	6	12	3	8.28	11	3	4	12	3
8.14	10	4	6	15	2	8.29	17	2	5	19	5
8.15	12	3	5	18	4	8.30	13	5	6	18	3

2.3 Типтік варианттың шешуі

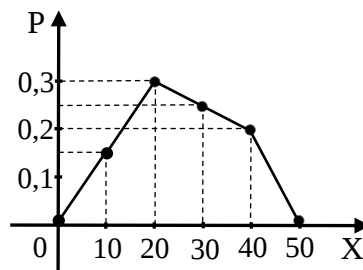
1. Дискретті кездейсоқ шама X үлестірім заңдылығымен берілген.

X	0	10	20	30	40	50
P	0,05	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05

Үлестірім көпмүшелігін құру керек. Табу керек:

- а) оның $F(x)$ үлестірім функциясын, оның графигін салу керек;
- б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын;
- в) X -тің (15;45) интервалына түсу ықтималдығын табу керек.

Шешуі: үлестірім көпмүшелігін құрамыз (суретте):



а) X кездейсоқ шамасының $F(x)$ үлестірім функциясы (интегралдық үлестірім функциясы) $X < x$ оқиғасының ықтималдығын анықтайды. Дискретті кездейсоқ шамасы

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы $x_i < x$ үшін қосу барлық i бойынша жүргізіледі.

Сонымен,

- 1) егер $x \leq 0$, онда $F(x) = P(X < 0) = 0$;
- 2) егер $0 < x \leq 10$, онда $F(x) = P(X = 0) = 0,05$;
- 3) егер $10 < x \leq 20$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) = 0,05 + 0,15 = 0,2$;
- 4) егер $20 < x \leq 30$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) = 0,2 + 0,3 = 0,5$;
- 5) егер $30 < x \leq 40$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) = 0,5 + 0,25 = 0,75$;
- 6) егер $40 < x \leq 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) = 0,75 + 0,2 = 0,95$;
- 7) егер $x > 50$, онда $F(x) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 20) + P(X = 30) + P(X = 40) + P(X = 50) = 0,95 + 0,05 = 1$.

$$\text{Сонымен, } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ 0,05, & \text{егер } 0 < x \leq 10 \\ 0,2, & \text{егер } 10 < x \leq 20 \\ 0,5, & \text{егер } 20 < x \leq 30 ; \\ 0,75, & \text{егер } 30 < x \leq 40 \\ 0,95, & \text{егер } 40 < x \leq 50 \\ 1, & \text{егер } x > 50 \end{cases}$$

График Mathcad жүйесінде сызылған (төменде);

б) сандық сипаттамаларын табайық. Дискретті кездейсоқ шама үшін математикалық үміт кездейсоқ шаманың барлық мүмкін мәндерін оның ықтималдықтарына көбейтіп қосқанға тең:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i .$$

Сондықтан

$$M(X) = 0 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,15 + 20 \cdot 0,3 + 30 \cdot 0,25 + 40 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,05 = 25,5.$$

X кездейсоқ шаманың дисперсиясы $D(X) = M[X - M(X)]^2$ формуласымен немесе

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

формуласымен есептелінеді.

Дискретті кездейсоқ шама үшін бұл формулалар мына түрде қолданылады: $D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ немесе

$$D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2 .$$

Орта квадраттық ауытқу

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

санына тең;

дискретті кездейсоқ шаманың модасы (белгіленуі M_0) – осы кездейсоқ шаманың ең үлкен ықтималдықты қабылдайтын мәні;

X –тің $(a;b)$ интервалына түсу ықтималдығы $P(a;b) = F(b) - F(a)$ формуласымен есептелінеді.

Біздің есеп үшін бұл шамалар:

$$D(x)=154,75; \sigma(x) = \sqrt{154,75} = 12,44; M_0=20;$$

$$P(15;45) = F(45) - F(15) = 0,75.$$

Төменде Mathcad-тан есептеулермен файлдың көшірмесі келтірілген, дисперсия екі формуламен де есептелінген.

$$\text{ORIGIN} = 1$$

$$\underline{s} := (0 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40 \ 50),$$

$$M := s^T \cdot p^T,$$

$$\underline{p} := (0.05 \ 0.15 \ 0.3 \ 0.25 \ 0.2 \ 0.05),$$

$$M = 25.5,$$

$$s0 := s^T - M,$$

$$s0 = \begin{pmatrix} -25.5 \\ -15.5 \\ -5.5 \\ 4.5 \\ 14.5 \\ 24.5 \end{pmatrix}$$

$$D := \left[\overrightarrow{(s0 \cdot s0)} \right]^T \cdot p^T,$$

$$D = 154.75,$$

$$s2 := (0^2 \ 10^2 \ 20^2 \ 30^2 \ 40^2 \ 50^2),$$

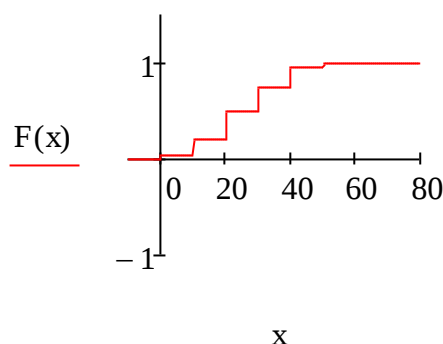
$$D1 := s2^T \cdot p^T - M^2,$$

$$D1 = 154.75,$$

$$F(45) - F(15) = 0.75.$$

$$\sigma := \sqrt{D} = 12.44,$$

$$\underline{F}(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 0.05 & \text{if } 0 < x \leq 10 \\ 0.2 & \text{if } 10 < x \leq 20 \\ 0.5 & \text{if } 20 < x \leq 30 \\ 0.75 & \text{if } 30 < x \leq 40 \\ 0.95 & \text{if } 40 < x \leq 50 \\ 1 & \text{if } x > 50 \end{cases}$$



2. Урнада 4 ақ және 12 қара шарлар бар. Шарларды біртіндеп қара шар пайда болғанша (қайтарымсыз) алады. X – қара шар пайда болғанша алынған шарлар саны болсын. X үлестірім заңын, оның математикалық үмітін және модасын табу керек.

Шешуі: барлығы урнада 16 шарлар бар. Урнада 4 ақ шар болғандықтан, қара шарды алуға төрт сәтсіз әрекет жасағаннан кейін урнада ақ доп қалмайды, тек қара допты ғана алып, бесінші қадамда қара шарды алынады.

Сондықтан $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – X –тің мүмкін мәндерінің жиыны. X –тің мүмкін мәндерінің ықтималдығын табамыз:

$$P(X=1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4};$$

$$P(X=2) = \frac{4}{16} \cdot \frac{12}{15} = \frac{1}{5};$$

$$P(X=3) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{12}{14} = \frac{3}{70};$$

$$P(X=4) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{12}{13} = \frac{9}{455};$$

$$P(X=5) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{12}{12} = \frac{1}{1820}.$$

Сөйтіп, үлестірім заңы X (үлестірім қатары) мынадай формаға ие:

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{9}{455}$	$\frac{1}{1820}$

$$M(X) = 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{3}{70} + 4 \cdot \frac{9}{455} + 5 \cdot \frac{1}{1820} = 1,385;$$

$$M_0 = 1.$$

3. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім функциясымен $F(x)$ берілген.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2 \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}.$$

Табу керек:

а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;

в) X –тің (1; 2,5) интервалына түсу ықтималдығы табу керек.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі:

а) үзіліссіз кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығы оның үлестірім функциясының туындысына тең:

$$f(x) = F'(x).$$

$$\text{Сондықтан } f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 2 \\ 2(x-2), & \text{егер } 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{егер } x > 3 \end{cases}$$

б) үзіліссіз кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары мына формулалармен табылады:

$$\text{математикалық үміт } M(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} xf(x)dx;$$

$$\text{дисперсия } D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} (x - M(x))^2 f(x)dx \text{ немесе}$$

$$D(x) = \int_{-\infty(a)}^{\infty(b)} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2$$

(интегралдау шектері кездейсоқ шаманың мүмкін мәндері Ох осінің барлық немесе (a;b) интервалының мәндерін қабылдауына байланысты);

$$\text{орта квадраттық ауытқуы } \sigma(x) = \sqrt{D(x)};$$

X кездейсоқ шаманың *модасы* деп үлестірім тығыздығы максималды болатын M_o мәні айтылады;

X кездейсоқ шаманың *медианасы* деп кездейсоқ шама M_e -ден кем немесе артық болғанда ықтималдығы бірдей болатын M_e мәні айтылады, яғни

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = 0,5.$$

Сонымен, біздің есепте

$$M(x) = \int_2^3 2x(x-2)dx = 8/3;$$

$$D(x) = \int_2^3 x^2 \cdot 2(x-2)dx - (8/3)^2 = 1/18;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1/18} = 0,236.$$

Моданы анықтау үшін [2; 3] кесіндісіндегі функцияның максимумын табу керек $f(x) = 2(x-2)$. Бұл функция монотонды болғандықтан, оның максимумы кесіндінің шеткі нүктелерінде табылады, яғни $f_{\max} = f(3) = 2$. Сонымен, $M_o = 3$. Медиананы $P(X < M_e) = 0,5$ шартынан табуға болады, мұндағы

$$P(X < M_e) = P(-\infty < X < M_e) = P(2 < X < M_e) \text{ ықтималдығы}$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \text{ немесе } P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

формуласы (кездейсоқ шаманың (a;b) аралығына түсу ықтималдығы) бойынша

$$\text{табылады. } P(2 < X < M_e) = \int_2^{M_e} 2(x-2)dx = (M_e - 2)^2 \text{ болғандықтан,}$$

$$(M_e - 2)^2 = 0,5$$

теңдеуін шеше отырып, екі түбір 1,29 және 2,71 аламыз, олардың біреуі ғана (2,3) аралығында жатады: $M_e = 2,71$.

в) X кездейсоқ шамасының (1; 2,5) интервалына түсу ықтималдығы жоғарыда келтірілген формулалар бойынша табылады

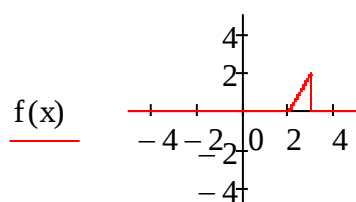
$$P(1 < X < 2,5) = P(1 < X < 2) + P(2 < X < 2,5) =$$

$$= 0 + \int_2^{2,5} 2(x-2)dx = 0,25 \text{ немесе } P(1 < X < 2,5) = F(2,5) - F(1) =$$

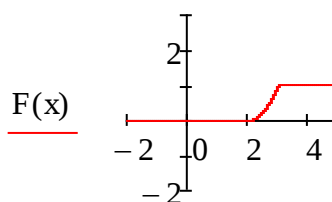
$$(2,5 - 2)^2 - 0 = 0,25.$$

$F(x)$ және $f(x)$ функцияларының графиктерін Mathcad жүйесінде саламыз:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 2 \\ [2 \cdot (x - 2)] & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}, \quad F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 2 \\ (x - 2)^2 & \text{if } 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases},$$



x



x

Атап өтелік, интегралдарды анықтау және басқа есептеулерді Mathcad жүйесінде жүргізуге болады, мысалы,

$$\int_2^3 2 \cdot x \cdot (x - 2) dx \rightarrow \frac{8}{3} = 2.667$$

$$\int_2^3 2 \cdot x^2 \cdot (x - 2) dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{18} = 0.056, \quad \sqrt{\frac{1}{18}} = 0.236$$

$$\int_2^y 2 \cdot (x - 2) dx \rightarrow (y - 2)^2$$

$$(y - 2)^2 - 0.5 \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.2928932188134524756 \\ 2.7071067811865475244 \end{pmatrix}$$

3. Үзіліссіз кездейсоқ шама X үлестірім тығыздығымен $f(x)$ берілген.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ \frac{2}{9}(3x - x^2), & \text{если } 0 < x \leq 3 \\ 0, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Табу керек:

- а) оның үлестірім функциясын $F(x)$;
 б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын;
 в) X –тің $(1;4)$ интервалына түсу ықтималдығы табу керек.
 $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі:

- а) үлестірім функциясын

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

формуласы бойынша табамыз. Сонымен,

егер $x \leq 0$ болса, онда $f(x) = 0$, Сондықтан $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx = 0$;

егер $0 < x \leq 3$ болса, онда $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \frac{2}{9}(3x - x^2)dx = -\frac{x^2(2x - 9)}{27}$;

егер $x > 3$ болса, онда $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 \frac{2}{9}(3x - x^2)dx + \int_3^x 0 dx = 1$.

Сонымен, үлестірім функциясының түрі

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ -\frac{x^2(2x - 9)}{27}, & \text{егер } 0 < x \leq 3. \\ 1, & \text{егер } x > 3 \end{cases}$$

б) математикалық үмітін, дисперсиясын, орта квадраттық ауытқуын, модасын, медианасын алдыңғы есептегідей табамыз

$$M(x) = \int_0^3 2/9x(3x - x^2)dx = 1,5;$$

$$D(x) = \int_0^3 x^2 \cdot 2/9(3x - x^2)dx - 1,5^2 = 0,45;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,45} = 0,671.$$

Моданы анықтау үшін $f(x) = 2/9(3x - x^2)$ функциясының $[0; 3]$ кесіндісіндегі максимумын табамыз. Ол үшін функцияның туындысын тауып, нөлге теңестіреміз: $f'(x) = 2/3 - 4x/9$, $x=3/2$ мәнінде $f'(x) = 0$ болады, бұл нүкте кризистік нүкте болады. Оны экстремумге тексереміз: $f'(1) > 0$, $f'(2) < 0$, Сонымен, функцияның туындысы $x=3/2$ нүктесінен ауысқанда таңба плюстен минуске өзгергендіктен, $x=3/2$ максимум нүктесі. Сондықтан, $M_o = 3/2$.

Медиананы $P(X < M_e) = 0,5$ шартынан табамыз, мұндағы

$$P(X < M_e) = P(-\infty < X < M_e) = P(0 < X < M_e).$$

$$P(0 < X < M_e) = \int_0^{M_e} 2/9(3x - x^2)dx = M_e^2(2M_e - 9)/27$$

болғандықтан,

$$M_e^2(2M_e - 9)/27 = 0,5$$

теңдеуін шешіп, үш түбір аламыз, бізге керегі біреуі ғана: $M_e = 1,5$.

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{2}{9} \cdot (3 \cdot x - x^2), & \sqrt{\frac{9}{20}} &= 0.671, \\ \int_0^3 x \cdot f(x) dx &\rightarrow \frac{3}{2} = 1.5, & \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 &\rightarrow \frac{9}{20} = 0.45, \\ \frac{d}{dx} f(x) &\rightarrow \frac{2}{3} - \frac{4 \cdot x}{9}, & f1(x) &:= \frac{d}{dx} f(x), \\ \int_0^y f(x) dx &\rightarrow -\frac{y^2 \cdot (2 \cdot y - 9)}{27}, & f1(x) \text{ solve} &\rightarrow \frac{3}{2}, \\ f1(1) &= 0.222, & f1(2) &= -0.222, \\ -\frac{y^2 \cdot (2 \cdot y - 9)}{27} - 0.5 \text{ solve} &\rightarrow \begin{pmatrix} 4.0980762113533159403 \\ -1.0980762113533159403 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.098 \\ -1.098 \\ 1.5 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

в) X -тің (1;4) интервалына түсу ықтималдығы

$$P(1 < X < 4) = P(1 < X < 3) + P(3 < X < \infty) = \int_1^3 2/9(3x - x^2)dx + 0 = 0,741$$

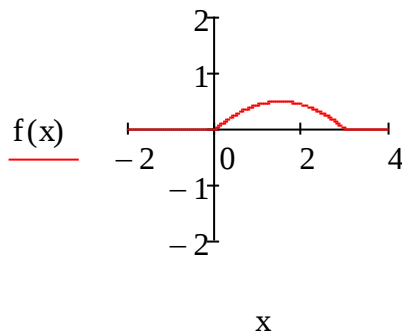
$$\begin{aligned} \text{немесе } P(1 < X < 4) &= P(1 < X < 3) + P(3 < X < \infty) = F(3) - F(1) = \\ &= 3^2(2 \cdot 3 - 9)/27 - 1^2(2 \cdot 1 - 9)/27 = 1 - 0,259 = 0,741. \end{aligned}$$

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

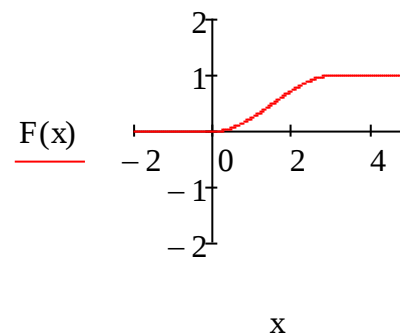
$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &\rightarrow \frac{20}{27} = 0.741, & f2(x) &:= -\frac{x^2 \cdot (2 \cdot x - 9)}{27}, \\ f2(1) &= 0.259, & f2(3) &= 1, & 1 - 0.259 &= 0.741. \end{aligned}$$

$F(x)$ және $f(x)$ функцияларының графиктерін Mathcad жүйесінде саламыз:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \left[\frac{2}{9} \cdot (3 \cdot x - x^2) \right] & \text{if } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$



$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{x^2 \cdot (9 - 2 \cdot x)}{27} & \text{if } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{if } x > 3 \end{cases}$$



5. Биномдық үлестірім (*a* нұсқа). Пуассон үлестірімі (*b* нұсқа).

Өнім N элементтен тұрады. Қандай да бір уақыт аралығында бір элементтің істен шығу ықтималдығы p -ға тең және қалған элементтің жағдайларынан тәуелсіз. Істен шыққан элементтер санының (X кездейсоқ шамасы) үлестірім заңын құрыңыз.

a нұсқасы үшін осы кездейсоқ шаманың математикалық үмітін, дисперсиясын және орта квадраттық ауытқуын табу керек;

b нұсқасы үшін көрсетілген уақытта екіден кем емес элементтің істен шығу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі:

a) $N=6$, $p=0,25$, дискретті кедейсоқ шама X – істен шыққан элементтер саны. Оның мүмкін мәндері: $x_1 = 0$ (істен шыққан элемент жоқ), $x_2 = 1$ (бір элемент істен шықты) және т.с.с $x_7 = 6$ (алты элемент істен шықты). Мүмкін мәндер тәуелсіз және әрқайсысының пайда болу ықтималдықтары бірдей.

Сондықтан X кедейсоқ шамасы бином заңы бойынша үлестірілген:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

мұндағы $k = 0, 1, 2, \dots, 6$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$, $n = 6$.

Сонымен,

$$P(X = 0) = P_6(0) = C_6^0 0,25^0 0,75^6 = 0,178;$$

$$P(X=1) = P_6(1) = C_6^1 0,25^1 0,75^5 = 0,356; \quad P(X=2) = P_6(2) = C_6^2 0,25^2 0,75^4 = 0,297;$$

$$P(X=3) = P_6(3) = C_6^3 0,25^3 0,75^3 = 0,132; \quad P(X=4) = P_6(4) = C_6^4 0,25^4 0,75^2 = 0,033;$$

$$P(X=5) = P_6(5) = C_6^5 0,25^5 0,75^1 = 0,004; \quad P(X=6) = P_6(6) = C_6^6 0,25^6 0,75^0 = 0,0002.$$

Сөйтіп, үлестірім заңы мына түрге ие:

X	0	1	2	3	4	5	6
p	0,178	0,356	0,297	0,132	0,033	0,004	0,0002

Алайда, математикалық үміт пен дисперсияның қасиеттерін қолданған қолайлы, егер X – оқиғасының n сынақта пайда болуы:

$$M(X) = np,$$

$$D(X) = npq.$$

Біздің жағдайда

$$M(X) = 6 \cdot 0,25 = 1,5,$$

$$D(X) = 6 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 1,125,$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)} \approx 1,06.$$

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$\underline{C}(Q,R) := \text{combin}(Q,R)$$

$$\underline{C}(Q,R) := \text{combin}(Q,R);$$

$$C(6,0) \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^6 = 0,178; \quad C(6,2) \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^4 = 0,297;$$

$$C(6,1) \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^5 = 0,356; \quad C(6,3) \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^3 = 0,132;$$

$$C(6,4) \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^2 = 0,033; \quad C(6,5) \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^1 = 4,395 \times 10^{-3};$$

$$C(6,6) \cdot 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 2,441 \times 10^{-4}.$$

Бином үлестірімінің талдауын Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі binom (dbinom, rbinom, qbinom, rbinom). Мысалы, dbinom(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

b) $N=1000$, $p=0,001$, бұл жағдайда дискретті кездейсоқ шама X – істен шыққан элементтер саны Пуассон заңымен үлестірілген (әрбір сынақта пайда болу ықтималдығы p аз, ал жүргізілетін сынақтар саны n үлкен болғанда бұл заң бином заңы үшін шектік болып табылады):

$$P(X=k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

мұндағы $\lambda = np = 1000 \cdot 0,001 = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots, 1000$, $n = 1000$.

Сонымен,

$$P(X = 0) = P_{1000}(0) \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0,368;$$

$$P(X = 1) = P_{1000}(1) \approx \frac{1^1}{1!} e^{-1} = 0,368;$$

$$P(X = 2) = P_{1000}(2) \approx \frac{1^2}{2!} e^{-1} = 0,184;$$

$$P(X = 3) = P_{1000}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} = 0,061 \text{ және т.с.с.}$$

$$P(X = 10) = P_{1000}(10) \approx \frac{1^{10}}{10!} e^{-1} = 0,0000001 \text{ және т.с.с.}$$

Үлестірім заңы мынадай:

X	0	1	2	3	...	10	...
p	0,368	0,368	0,184	0,061	...	0,0000001	...

Екіден кем емес элементтің істен шығу ықтималдығы келесі формуламен есептелінеді:

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{1000} P_{1000}(k) \quad \text{немесе}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,368 - 0,368 = 0,264.$$

Төменде Mathcad-тан есетеулермен файлдың көшірмесі келтірілген.

$$p(k, \lambda) := \text{dpois}(k, \lambda)$$

$$p(0, 1) = 0.368$$

$$p(4, 1) = 0.015$$

$$p(1, 1) = 0.368$$

$$p(5, 1) = 3.066 \times 10^{-3}$$

$$p(2, 1) = 0.184$$

$$p(10, 1) = 1.014 \times 10^{-7}$$

$$p(3, 1) = 0.061$$

$$p(1000, 1) = 0$$

Пуассон үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөзі pois (dpois, rpois, qpois, gpois). Мысалы, dpois(k,n,p) функциясы ықтималдықтар мәнін шығарады т.с.с.

6. Бірқалыпты үлестірім.

a нұсқасы.

Өлшегіш құралы бірнеше бөлікке бөлінген, әрбір бөліктің бағасы 0,2 тең. Құралдың көрсеткіші жақын бүтін бөлікке дейін жуықталады. X кездейсоқ шамасы – жуықтау қателігі.

b нұсқасы.

Қайбір маршруттың троллейбустары кесте бойынша ғана жүреді. Жүру интервалы 5 минут. X кездейсоқ шамасы – троллейбусты күту уақыты.

Табу керек:

а) оның үлестірім тығыздығын $f(x)$;

б) үлестірім функциясын $F(x)$;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) есептегенде 0,04 -тен кем (артық) қате кету ықтималдығын (a нұсқасы үшін);

д) аялдамаға келген жолаушы троллейбусты 3 минуттан кем (артық) күту ықтималдығын (b нұсқасы үшін).

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X кездейсоқ шамасы – жуықтап есептеуде жіберілген қате екі бүтін бөліктеу арасында бірқалыпты жүргізілген;

$b - a = 0,2$ – X -тің мүмкін мәндер енетін интервалдың ұзындығы.

$$\text{Бірқалыпты үлестірімнің тығыздығы } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{егер } x \in (a, b) \\ 0, & \text{егер } x \notin (a, b) \end{cases}$$

формуласымен есептелінеді.

$$\text{Үлестірім функциясы} - F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{егер } a < x \leq b; \\ 1, & \text{егер } x > b \end{cases}$$

$$\text{Математикалық үміті} - M(X) = \frac{a+b}{2};$$

$$\text{Дисперсиясы} - D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

$$(\alpha, \beta) \text{ аралығына түсу ықтималдығы} - P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}.$$

Біздің есеп үшін:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0,2} = 5, & \text{егер } x \in (0; 0,2) \\ 0, & \text{егер } x \notin (0; 0,2) \end{cases};$$

$$б) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ \frac{x}{0,2} = 5x, & \text{егер } 0 < x \leq 0,2; \\ 1, & \text{егер } x > 0,2 \end{cases}$$

$$в) M(X) = \frac{0,2+0}{2} = 0,1; \quad D(X) = \frac{(0,2-0)^2}{12} = 0,003;$$

г) егер ол (0; 0,04) немесе (0,16; 0,2) аралығына түссе (A оқиғасы), онда есептегенде 0,04-тен кем қате кететіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

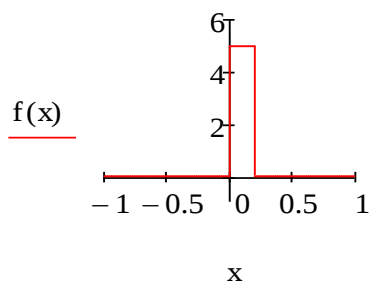
$$P(A) = P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,2) = \frac{0,04-0}{0,2} + \frac{0,2-0,16}{0,2} = 0,4;$$

егер ол (0,04; 0,16) аралығына түссе (B оқиғасы), онда есептегенде 0,04-тен артық қате кететіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

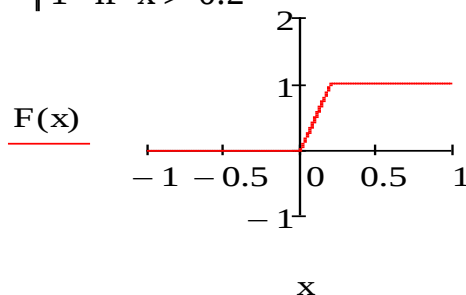
$$P(B) = P(0,04 < X < 0,16) = \frac{0,16-0,04}{0,2} = 0,6 \text{ немесе } P(B) = 1 - P(A).$$

Mathcad жүйесінде $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін саламыз.

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 5 & \text{if } 0 < x \leq 0.2 \\ 0 & \text{if } x > 0.2 \end{cases}$$



$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ (5 \cdot x) & \text{if } 0 < x \leq 0.2 \\ 1 & \text{if } x > 0.2 \end{cases}$$



б) X кездейсоқ шамасы –трамвайды күту уақыты трамвайдың алдамаға тізбектей екі рет келуінің арасында бірқалыпты жүргізілген;

$b - a = 5$ – X –тің мүмкін мәндер енетін интервалдың ұзындығы. Бірқалыпты үлестірімнің барлық формулалары жоғарыда көрсетілген.

Біздің есеп үшін:

$$а) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} = 0,2, & \text{егер } x \in (0;5); \\ 0, & \text{егер } x \notin (0;5) \end{cases};$$

$$б) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 0 \\ \frac{x}{5} = 0,2x, & \text{егер } 0 < x \leq 5; \\ 1, & \text{егер } x > 5 \end{cases}$$

$$в) M(X) = \frac{5+0}{2} = 2,5;$$

$$D(X) = \frac{(5-0)^2}{12} = 2,08;$$

г) егер жолаушы аялдамаға (0; 3) немесе (2; 5) уақыт аралығында келсе (А оқиғасы), онда ол трамвайды 3 минуттен кем күтетіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

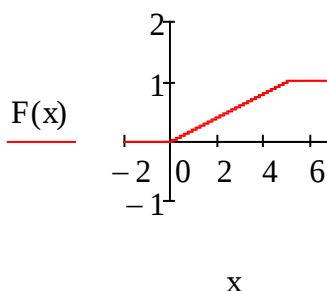
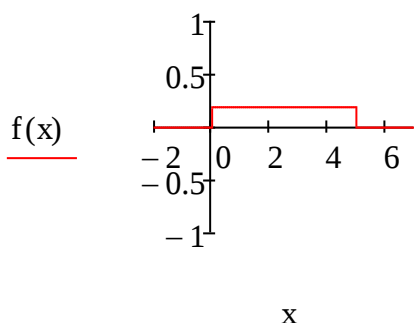
$$P(A) = P(0 < X < 3) = \frac{3-0}{5} = 0,6;$$

д) егер жолаушы аялдамаға (0; 2) немесе (3; 5) уақыт аралығында келсе (В оқиғасы), онда ол трамвайды 3 минуттен артық күтетіндігі белгілі, яғни бұл оқиғаның ықтималдығы

$$P(B) = P(3 < X < 5) = \frac{5-3}{5} = 0,4 \quad \text{немесе} \quad P(B) = 1 - P(A).$$

Mathcad жүйесінде $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін саламыз.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 0.2 & \text{if } 0 < x \leq 5 \\ 0 & \text{if } x > 5 \end{cases} & F(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ (0.2 \cdot x) & \text{if } 0 < x \leq 5 \\ 1 & \text{if } x > 5 \end{cases} \end{aligned}$$



Бірқалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері `unif: dunif(x,a,b)` – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері `runif(x,a,b)` – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; `runif(n,a,b)` – (a,b) аралығында бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

7. Элементтің мүлтіксіз жұмыс уақыты (T кездейсоқ шамасы) $\lambda = 0,5$ параметрімен көрсеткішті үлестірілген, мұндағы λ - істен шығу интенсивтілігі, яғни бірлік уақыт ішіндегі істен шығудың орта саны. Табу керек:

- а) $f(t)$ үлестірім тығыздығын;
- б) $F(t)$ үлестірім функциясын, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
- в) сенімділік функциясын $R(t)$, оның ықтималдық мағынасын көрсету керек;
- г) математикалық үмітін, дисперсиясын;
- д) элементтің $t=5$ сағат уақыт ішінде істен шығу ықтималдығын және элементтің $t=5$ сағат уақыт ішінде істен шықпау ықтималдығын $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін салу керек.

Шешуі:

X үзіліссіз кездейсоқ шамасы

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{тығыздығымен берілсе,}$$

онда ол *көрсеткіштік* үлестірім заңына бағынады.

Көрсеткіштік үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{егер } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{- үлестірім функциясы;}$$

егер кездейсоқ шама $X=T$ – уақыты болса, онда

$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ элементтің t уақытындағы *істен шығуының ықтималдығы*;

$R(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$ – *сенімділік функциясы*, t уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығы;

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta}.$$

Біздің есепте $t \geq 0$ болатындығын ескерсек:

- а) $f(t) = 0,5e^{-0,5t}$;
- б) $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-0,5t}$, элементтің t уақытындағы істен шығуының ықтималдығын анықтайды;
- в) $R(t) = e^{-0,5t}$, t уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығын анықтайды;

$$\text{г) } M(X) = \frac{1}{0,5} = 2; \quad D(X) = \frac{1}{0,5^2} = 4;$$

д) үлестірім функциясы t уақытындағы істен шығуының ықтималдығын анықтайтын болғандықтан, оған $t=5$ мәнін қойып, $t=5$ сағат уақыты ішіндегі істен шығуының ықтималдығын аламыз:

$$F(5) = 1 - e^{-0,5 \cdot 5} = 1 - e^{-2,5} = 0,918;$$

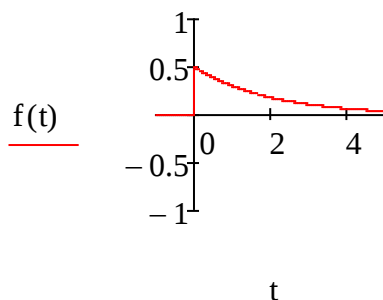
«элемент істен шығады» және «элемент істен шықпайды» оқиғалары – қарама-қарсы, сондықтан $t=5$ уақытындағы элементтің мүлтіксіз жұмысының ықтималдығы $1 - 0,918 = 0,082$.

Бұл нәтижені сенімділік функциясын қолданып алуға болады:

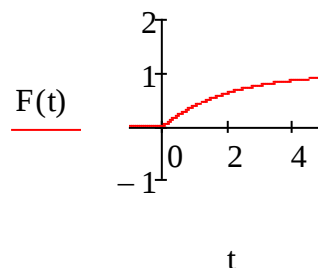
$$R(5) = e^{-0,5 \cdot 5} = e^{-2,5} = 0,082.$$

Mathcad жүйесінде $F(t)$, $R(t)$ және $f(t)$ графиктерін саламыз және кейбір есептеулер жүргіземіз:

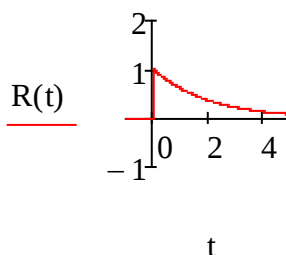
$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 0,5 \cdot e^{-0,5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$$F(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 - e^{-0,5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$$R(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ e^{-0,5 \cdot t} & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} e^{-2,5} &= 0,082 \\ 1 - e^{-2,5} &= 0,918 \end{aligned}$$

Көрсеткіштік үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері $\text{dexp}(x, \lambda)$ – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері $\text{rexp}(x, \lambda)$ – үлестірім функциясының мәндерін шығарады; $\text{rexp}(n, \lambda)$ – λ параметрмен көрсеткіштік үлестірілген n мәнді тәуелсіз кездейсоқ сандардың массивін шығарады.

8. Өлшеудің кездейсоқ қатесі (X кездейсоқ шамасы) $a=10$ және $\sigma=2$ параметрлі қалыпты үлестірім заңына бағынады. Табу керек:

а) $f(x)$ үлестірім тығыздығын;

б) $F(x)$ үлестірім функциясын;

в) математикалық үмітін, дисперсиясын;

г) $(12;14)$ аралығына түсу ықтималдығын;

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша $\delta=3$ -тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын.

$F(x)$ және $f(x)$ графиктерін салу керек.

Шешуі: X үзіліссіз кездейсоқ шамасы

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

тығыздығымен берілсе, онда ол қалыпты үлестірім заңына бағынады, мұндағы

$a=M(x)$ – математикалық үміт,

$\sigma = \sigma(X)$ – орта квадраттық ауытқу.

Қалыпты үлестірімнің басқа ұғымдары мен формулалары

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right] dt \text{ немесе}$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + 0,5,$$

мұндағы $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – Лаплас функциясы, оның мәнін кестеден

табуға болады;

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен δ -дан артық емес ауытқуының ықтималдығы

$$P(|X - a| \leq \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формуласымен есептелінеді.

Біздің есеп үшін

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}};$$

$$\text{б) } F(x) = \Phi\left(\frac{x-10}{2}\right) + 0,5;$$

$$\text{в) } M(X) = a = 10, \sigma(X) = \sigma = 2, D(X) = \sigma^2 = 4;$$

$$\text{г) } P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359;$$

д) өлшеу абсолют шамасы бойынша $\delta=3$ -тен аспайтындай қате жіберу ықтималдығын

$$P(|X - 10| \leq 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) = 2\Phi(1,5) = 0,4332.$$

Бұл жерде Лаплас функциясының мәні кестеден алынған, оны Mathcad жүйесінде де табуға болады.

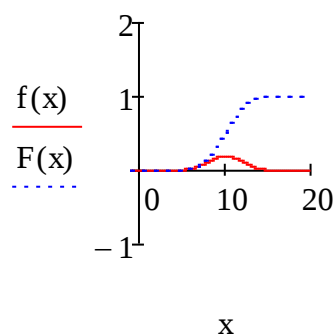
Қалыпты үлестіріміне Mathcad жүйесінде арнайы функцияларды қолданып жүргізуге болады, ол функциялардың түпкі сөздері norm және d, p, q, r. әріптерінен басталатын сөздер.

Мысалы, $\text{dnorm}(x, a, \sigma)$ – үлестірім тығыздығының мәндерін шығарады; түпкі сөздері $\text{pnorm}(x, a, \sigma)$ – үлестірім функциясының мәндерін шығарады. Осы функцияларды сәйкес графиктерді салу үшін қолданамыз.

Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген.

$$f(x) := \text{dnorm}(x, 10, 2)$$

$$F(x) := \text{pnorm}(x, 10, 2)$$



3 Есептік-сызба жұмыс №3. Математикалық статистика элементтері.

Мақсаты: математикалық статистиканың негізгі есептерін: кездейсоқ жаппай құбылыстардың нәтижелерін өңдеп, талдау есептерін оқып-үйрену.

3.1 Теориялық сұрақтар

1. Математикалық статистика пәні және оның негізгі есептері. Негізгі ұғымдар (таңдама, таңдама көлемі, варианттар, статистикалық қатар, интервалдық қатар).

2. Эмпирикалық үлестірім функциясы, полигон, гистограмма.

3. Үлестірімнің белгісіз параметрлерін анықтау (таңдама ортасы, таңдама дисперсиясы және түзетілген таңдама дисперсиясы).

4. Үлестірім параметрінің нүктелік және интервалдық бағалары.

5. Бағаның дәлдігі және сенімділігі. Сенімділік интервалы.

6. σ белгілі болғанда қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалы.

7. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың орта квадраттық ауытқуын бағалау үшін сенімділік интервалы.

8. Корреляциялық тәуелділік ұғымы. Регрессия функциясы мен сызығы.

3.2 Есептік тапсырмалар

1. Берілген таңдама үшін өңдеу және жүйелеу есептерін анықтап және орындау керек:

а) вариациялық қатарды (таңдаманы өсу ретімен);

б) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды;

в) жиілік және қатысты жиілік интервалдық статистикалық қатарын (минималды және максималды варианттарды, таңдаманың құлашын, интервалдар санын, интервалдар ұзындығын);

г) жиілік және қатысты жиіліктің дискретті (топталған) статистикалық қатарды;

2. Берілген таңдама талдау және бағалау есептерін орындау керек:

а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммаларын құру керек;

б) дискретті статистикалық қатар бойынша табу керек:

- жиілік және қатысты жиілік полигонын;

- үлестірімнің эмпирикалық функциясын;

- таңдама ортасын;

- таңдама және түзетілген таңдама дисперсиясын;

- түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуын;

- таңдама модасы мен медианасын;

в) жиілік және қатысты жиіліктің статистикалық қатары бойынша табу керек:

- таңдаманың бастапқы және орталық үшінші және төртінші ретті моменттерін;

- таңдама эксцессі;

- асимметрия таңдама коэффициенті.

1	112	101	155	137	109	129	152	128	132	116
	125	125	142	140	125	118	125	135	149	145
	106	109	138	145	118	128	125	105	122	138
	120	118	133	118	129	149	124	153	132	118
	132	132	138	128	122	115	143	140	122	152
	128	118	126	132	134	123	122	159	112	110
	112	121	105	117	112	129	129	118	112	116
2	87	85	91	94	102	80	75	102	99	101
	120	122	101	88	80	97	92	91	94	82
	115	100	97	91	87	116	121	101	123	97
	88	90	101	95	93	92	88	94	98	99
	95	105	112	116	118	108	95	99	92	100
	94	106	112	122	100	92	93	82	111	102
	100	101	123	97	90	104	108	101	96	111
3	547	565	587	553	548	554	561	562	551	572
	565	555	563	568	586	549	575	537	581	553
	543	568	574	564	547	549	553	572	535	555
	552	545	554	571	569	539	549	553	562	561
	558	563	563	547	552	562	554	563	558	572
	577	554	552	566	557	551	552	571	551	552
	599	561	552	551	561	538	533	541	588	558
4	90	123	132	85	122	105	125	142	99	125
	118	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132
5	139	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	116	105	92	115	98	123	103	144	115	142
	106	92	118	86	125	105	122	138	105	118
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	103	95	122
	125	118	96	126	98	106	128	118	126	103
	134	112	101	105	117	92	129	99	118	112
6	154	143	155	113	155	171	168	153	135	168
	145	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	146	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	155	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	163	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	168	157	143	179	165	159	149	141	102	169

7	470	801	790	764	764	950	533	402	520	780
	699	840	869	551	707	635	703	801	859	475
	797	797	789	875	698	580	821	737	910	856
	950	741	473	988	737	787	667	649	797	939
	532	885	590	590	975	910	731	869	435	889
	584	967	950	531	775	485	756	656	680	741
	950	458	511	857	536	699	474	789	889	533
8	450	434	424	432	440	443	415	446	423	472
	442	452	444	425	403	458	455	431	446	424
	438	442	482	432	416	477	431	432	412	462
	496	468	424	438	452	446	418	474	432	452
	466	488	452	489	451	422	442	492	473	402
	481	468	404	498	467	398	440	449	417	425
	444	498	466	442	483	462	492	435	449	422
9	250	244	224	232	240	224	244	226	253	232
	248	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	242	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	296	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	276	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	244	276	224	240	272	268	281	234	268	251
	271	212	234	262	204	261	254	266	278	248
10	165	143	152	167	164	199	171	171	156	149
	147	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	175	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	187	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	153	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	148	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	154	175	163	149	162	161	161	193	172	175
11	161	164	178	138	164	172	187	178	143	161
	153	174	154	163	174	152	188	162	197	234
	188	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	155	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	149	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	156	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	162	164	178	138	164	172	187	178	143	161
11	165	163	177	161	149	146	152	139	156	152

12	212	231	251	204	246	232	282	242	252	276
	297	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	277	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	345	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	272	212	234	292	204	261	254	266	278	248
	253	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	237	264	252	248	247	268	229	235	262	212
	238	242	254	263	261	266	254	264	248	251
13	165	143	52	166	164	199	171	171	156	171
	148	155	158	145	158	177	161	181	153	197
	176	153	174	154	163	174	152	188	162	172
	189	158	154	171	163	172	152	178	151	186
	157	186	147	169	147	166	161	171	161	152
	150	161	189	199	162	167	198	168	135	175
	158	175	163	149	162	161	161	193	172	
14	216	230	254	258	202	225	224	252	234	250
	243	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	298	242	254	218	226	252	238	224	298	260
	278	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	246	276	224	240	272	268	281	234	268	232
	273	212	234	262	201	261	254	266	278	248
	254	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	239	264	252	248	247	268	229	235	262	212
15	165	143	152	167	165	199	171	171	156	152
	149	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	153	174	154	163	174	152	188	162	197	178
	190	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	159	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	151	161	189	199	162	167	198	168	135	152
	160	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	165	164	178	137	164	172	187	178	143	161
16	147	153	179	165	159	149	141	102	169	157
	169	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	150	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	156	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	164	169	165	148	151	153	139	166	138	128
	169	169	155	152	175	177	131	154	174	187
	180	177	162	149	146	113	151	152	134	125

17	558	563	569	547	552	562	554	549	575	578
	561	552	551	561	538	533	547	552	557	543
	547	565	587	553	548	554	561	564	562	558
	566	555	563	568	586	549	575	564	553	555
	567	556	546	552	543	554	556	566	592	562
	544	568	574	564	547	549	553	578	557	561
	553	545	554	571	569	539	549	538	575	554
	577	552	566	557	551	552	546	584	572	535
18	577	568	557	564	547	549	553	578	557	575
	554	5455	554	571	569	539	549	538	575	566
	558	563	563	547	552	562	554	549	575	558
	547	595	587	553	548	554	561	564	562	544
	555	563	568	586	549	575	564	553	585	592
	577	554	552	566	557	551	552	546	584	556
	601	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	555	541	588	558	563	558	572	578	539	556
19	77	45	49	92	13	69	52	26	22	36
	48	25	59	57	65	69	55	68	49	63
	38	53	48	68	52	73	42	62	71	45
	63	55	16	78	52	95	77	66	35	54
	68	55	49	65	79	48	59	53	41	38
	12	39	57	51	65	66	43	52	63	43
	55	69	31	62	48	46	51	43	16	34
	74	51	82	52	46	75	49	55	57	54
20	347	365	387	348	354	361	364	362	346	358
	365	355	363	368	359	375	364	353	385	363
	343	368	374	364	347	349	353	378	357	358
	352	345	354	352	371	369	349	338	375	388
	366	358	363	347	352	362	354	349	375	341
	377	354	352	366	357	351	352	346	384	351
	399	363	361	352	351	361	338	353	333	357
21	9	9	6	9	9	7	6	11	6	7
	6	10	6	7	6	8	6	5	5	4
	6	6	7	12	5	7	8	5	10	9
	7	7	5	11	9	7	6	5	7	6
	5	5	12	9	8	7	9	8	5	5
	6	13	11	11	5	8	10	9	4	7
	3	6	9	8	12	11	9	10	4	14

22	39	40	38	43	41	42	40	38	41	42
	41	40	42	39	41	41	36	43	41	42
	34	36	37	42	42	42	40	41	41	46
	47	48	52	56	68	70	68	64	56	58
	41	42	39	33	34	37	43	45	47	71
	43	42	43	41	42	47	48	49	52	53
	57	52	41	42	46	48	49	39	32	40
	39	37	42	43	54	58	59	64	66	68
23	10	15	16	17	18	19	20	15	16	11
	17	12	13	14	15	11	18	16	15	18
	20	20	21	23	26	28	23	28	27	24
	27	24	25	25	26	32	33	31	34	43
	26	32	26	27	28	29	30	21	22	23
	42	24	23	35	23	25	36	37	24	21
	58	54	49	47	32	36	43	23	24	28
24	150	144	124	132	140	124	144	153	151	148
	116	130	154	158	102	125	124	152	134	148
	142	121	112	131	151	104	146	132	182	142
	152	196	142	154	158	118	126	152	138	124
	144	176	124	140	172	168	181	134	168	132
	144	112	134	162	104	161	154	166	178	148
	162	164	164	172	142	144	146	112	171	
25	128	105	115	92	115	142	98	123	103	144
	112	115	88	118	103	102	95	124	106	135
	95	124	103	102	118	112	115	92	115	119
	92	112	132	85	122	105	125	142	99	125
	106	92	118	105	118	86	125	105	122	138
	102	130	112	98	115	120	118	103	118	129
	103	122	94	112	97	128	102	116	125	132
26	102	112	118	85	112	115	103	95	122	125
	157	178	149	195	146	166	182	135	136	170
	157	143	179	165	159	149	141	102	169	168
	151	168	122	163	117	165	132	139	107	125
	152	152	142	132	152	161	148	136	138	149
	153	154	143	155	113	155	171	168	153	135
	157	152	145	198	192	143	159	116	126	155
	165	169	165	148	151	153	139	166	138	128

27	242	254	218	226	252	238	224	298	260	287
	250	216	230	254	258	202	225	224	252	234
	244	212	231	251	204	246	232	282	242	252
	299	254	282	242	270	254	260	232	268	242
	276	224	240	272	268	281	234	268	232	300
	274	212	234	262	204	261	254	266	278	248
	255	262	256	264	272	242	244	246	253	234
	240	264	252	248	247	268	229	235	262	212
28	262	267	275	266	246	252	261	269	262	268
	259	248	266	259	252	248	252	232	269	287
	253	286	275	235	202	239	225	236	237	224
	253	268	277	249	248	263	243	266	212	255
	249	288	213	264	247	242	228	277	256	251
	267	232	258	246	278	279	257	255	243	258
	254	244	265	274	252	265	222	269	254	278
	249	252	294	232	269	263	269	271	245	235
29	558	565	587	553	548	554	561	564	562	544
	563	568	586	549	575	564	553	585	577	553
	563	564	547	552	562	554	549	575	558	592
	546	577	568	574	564	547	549	553	578	557
	557	577	568	574	564	547	549	538	575	566
	558	554	552	566	557	551	552	546	584	532
	602	561	552	551	561	538	533	547	552	557
	556	541	588	558	563	558	572	578	539	556
30	165	143	152	167	164	199	171	171	156	151
	155	155	158	145	158	177	161	181	153	171
	177	153	174	154	163	174	152	188	162	197
	191	158	154	171	163	172	152	178	151	172
	161	186	147	169	147	166	161	171	161	186
	161	189	199	162	167	198	168	135	152	146
	162	175	163	149	162	161	161	193	172	175
	153	164	178	138	164	172	187	178	143	161

3. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ айнымалы X -ті n бақылау нәтижесінде математикалық үміттің және σ орта квадраттық ауытқуының нүктелік бағалары (яғни таңдама ортасы $\bar{x}_r$) табылды. $\gamma = 0.99$ сенімділікпен осы кездейсоқ шаманың μ математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын табу керек.

№	$\bar{x}_g$	n	σ	№	$\bar{x}_g$	n	σ	№	$\bar{x}_g$	n	σ
3.1	75.17	36	6	3.11	5.21	46	6	3.21	11.48	36	6
3.2	7.27	56	7	3.12	55.23	38	5	3.22	23.38	39	8
3.3	75.17	35	5	3.13	5.21	36	7	3.23	30.44	56	7
3.4	8.27	58	9	3.14	55.23	68	7	3.24	15.32	38	5
3.5	76.17	46	6	3.15	7.21	56	6	3.25	10.48	46	6
3.6	7.37	58	7	3.16	65.23	78	5	3.26	13.38	39	8
3.7	65.13	34	6	3.17	8.21	49	7	3.27	20.44	66	7
3.8	9.27	53	8	3.18	51.23	58	9	3.28	14.32	58	6
3.9	85.17	35	6	3.19	5.21	39	6	3.29	30.44	86	7
3.10	8.27	57	9	3.20	85.23	58	7	3.30	16.32	38	9

4. 1-2 есептердің берілімдері мен нәтижелері үшін қалыпты үлестірім берілген деп ұйғарып, табу керек:

а) таңдама ортасы $\bar{x}_T$ бойынша γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағасының дәлдігін;

б) γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын.

Егер таңдама ортасы $\bar{x}_T$, таңдама көлемі n , мәндерін 1-2 есептен, γ мәнін 5 есептен алу керек.

5. Теңіз тереңдігін өлшейтін құралдың жүйелі қателігі нөлге тең, ал өлшеудің кездейсоқ қатесі σ орта квадраттық ауытқуымен қалыпты үлестірілген. Теңіз тереңдігін анықтау үшін қатесі δ -дан артық емес, сенімділігі γ болатын қанша тәуелсіз өлшеу жүргізу керек?

№	γ	σ	δ	№	γ	σ	δ	№	γ	σ	δ
5.1	0.95	23	6	5.11	0.97	15	5	5.21	0.92	11	4
5.2	0.97	14	8	5.12	0.96	14	6	5.22	0.94	23	8
5.3	0.93	21	9	5.13	0.92	23	4	5.23	0.93	25	7
5.4	0.94	15	5	5.14	0.95	12	3	5.24	0.99	17	5
5.5	0.98	13	6	5.15	0.98	14	8	5.25	0.95	10	3
5.6	0.99	20	4	5.16	0.93	20	6	5.26	0.98	13	4
5.7	0.93	24	7	5.17	0.92	22	7	5.27	0.93	21	7
5.8	0.94	18	4	5.18	0.95	19	5	5.28	0.97	14	5
5.9	0.93	16	7	5.19	0.94	16	3	5.29	0.94	24	8
5.10	0.95	19	6	5.20	0.95	18	4	5.30	0.99	12	4

3.3 Типтік варианттың шешуі

1. Берілген таңдама үшін өңдеу және жүйелеу есептерін орындау керек:

- а) вариациялық қатарды (өсу ретімен таңдаманы);
- б) жиілік және қатысты жиілік статистикалық қатарды;
- в) жиілік және қатысты жиілік интервалдық статистикалық қатарын (минималды және максималды варианттарды, таңдаманың құлашын, интервалдар санын, интервалдар ұзындығын);
- г) жиілік және қатысты жиіліктің дискретті (топталған) статистикалық қатарды;

2. Берілген таңдама талдау және бағалау есептерін орындау керек:

- а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммаларын құру керек;
- б) дискретті статистикалық қатар бойынша табу керек:
 - жиілік және қатысты жиілік полигонын;
 - үлестірімнің эмпирикалық функциясын;
 - таңдама ортасын;
 - таңдама және түзетілген таңдама дисперсиясын;
 - түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуын;
 - таңдама модасы мен медианасын;
- в) жиілік және қатысты жиіліктің статистикалық қатары бойынша табу керек:
 - үшінші және төртінші ретті таңдама бастапқы және орталық моменттерін;
 - таңдама эксцесі;
 - асимметрия таңдама коэффициенті.

20	15	17	19	23	18	21	15	16	13
20	16	19	20	14	20	16	14	20	19
15	19	17	16	15	22	21	12	10	21
18	14	14	18	18	13	19	18	20	23
16	20	19	17	19	17	21	17	19	17
13	17	11	18	19					

Шешуі: Айта кетелік, есептеулер мен графиктер салу Mathcad-та жүргізіледі. Төменде Mathcad-та есептеулермен файлдың көшірмелері келтірілген. Mathcad-та алынған нәтижелерге түсініктеме беріп, ресімдеу керек.

а) таңдама көлемі $n = 55$. Вариациялық қатар (таңдама өсу ретімен алынған):

$$Y^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

(Mathcad-та кестені бағыттаушы бағытын басып көруге болады);

б) вариациялық қатар бойынша әрбір варианта қанша рет пайда болғанын есептейміз, яғни әрбір вариантаның жиілігін (n_i). Алынған деректер кестеге - жиіліктердің статистикалық қатарына енгізіледі:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
n_i	1	1	1	2	4	4	5	7	6	8	7	5	1	2

Варианттың салыстырмалы жиіліктері $p_i^* = \frac{n_i}{n}$ формуласы бойынша есептеледі, мұндағы n таңдама көлемі. Алынған нәтижелер кестеге - салыстырмалы жиіліктердің статистикалық қатарына енгізіледі:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p_i^*	0,018	0,018	0,018	0,036	0,073	0,073	0,091	0,127	0,109
x_i	19	20	21	22	23				
p_i^*	0,145	0,127	0,091	0,018	0,036				

в) интервалдық статистикалық қатар құру үшін келесі шамаларды анықтау керек:

ең үлкен және ең кіші варианттар: $a = x_{\min} = 10$, $b = x_{\max} = 23$;

таңдама құлашы: $R = b - a = 13$;

интервалдар санын Стерджес формуласымен анықтаймыз $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$,

$h = 1,917$ және бүтін бөлікке дейін жуықтаймыз $h \approx 2$;

интервалдар саны – формуланың бөлімі $m = 1 + \log_2 n$ немесе $m = \frac{R}{h} = 6,781$,

бүтін бөлікке дейін жуықтаймыз $m \approx 7$;

бірінші интервалдың басы ретінде $x_{\text{баст}} = x_{\min} - \frac{h}{2}$, $x_{\text{баст}} = 9,041 \approx 9$

шамасын алуды ұсынады;

әрбір интервалға енген варианттар саны (яғни n_i (яғни $p_i = \frac{n_i}{n}$))

Mathcad-та есептелінген (қараңыз $w1^T$ және $w2^T$).

Сонымен, ізделінді интервалдық қатар:

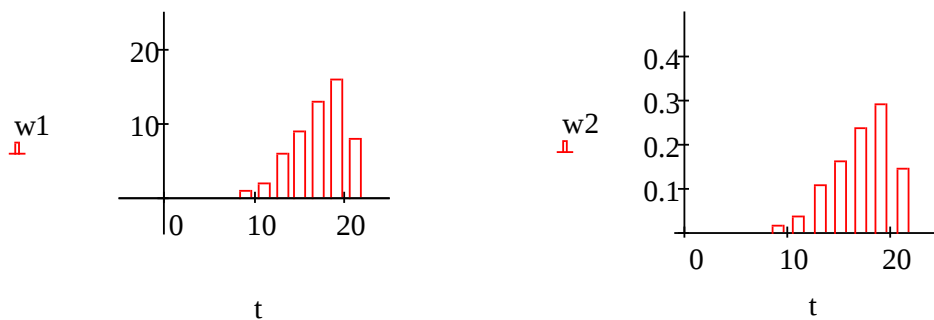
интервалдар	[9,11)	[11,13)	[13,15)	[15,17)	[17,19)	[19,21)	[21,23]
n_i	1	2	6	9	13	16	8
$p_i = \frac{n_i}{n}$	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

г) дискретті статистикалық қатарды құру үшін (кейбір оқулықтарда топталған статистикалық қатар деп атайды) интервалдар ортасын табамыз $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ (Mathcad-та x^T қара), оларға интервалдық қатардың сәйкес жиілік және қатысты жиіліктері дәл келеді.

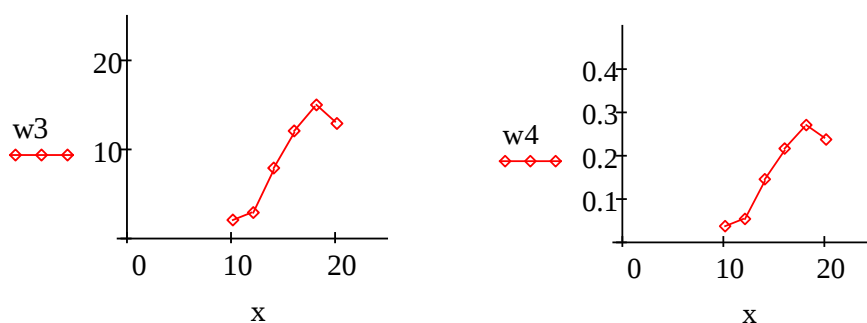
Ізделінді дискретті статистикалық қатар:

$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	10	12	14	16	18	20	22
n_i	1	2	6	9	13	16	8
p_i	0,018	0,036	0,109	0,164	0,236	0,291	0,145

2. а) интервалдық статистикалық қатар бойынша жиілік және қатысты жиілік гистограммаларын құрамыз (Mathcad жүйесінде):

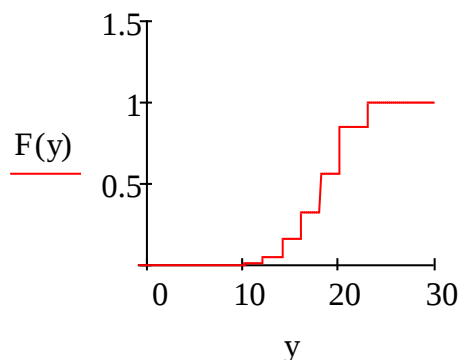


б) дискретті статистикалық қатар бойынша келесі шамаларды табамыз:
- жиілік және қатысты жиіліктер полигонын:



- үлестірімнің эмпирикалық функциясын (Mathcad-та F^T және $F(y)$ қара):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{егер } x \leq 10 \\ 0,018, & \text{егер } 10 < x \leq 12 \\ 0,054, & \text{егер } 12 < x \leq 14 \\ 0,163, & \text{егер } 14 < x \leq 16 \\ 0,327, & \text{егер } 16 < x \leq 18 \\ 0,563, & \text{егер } 18 < x \leq 20 \\ 0,854, & \text{егер } 20 < x \leq 23 \\ 1, & \text{егер } x > 23 \end{cases}$$



- таңдама ортасы (Mathcad-та $\text{mean}(X)$):

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_i x_i \cdot n_i}{n} \quad \text{немесе} \quad \bar{x}_T = \sum_i x_i \cdot p_i = 17,564;$$

- таңдама дисперсиясы мен түзетілген таңдама дисперсиясы:

$$D_T = \frac{\sum_i n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n} \quad \text{немесе} \quad D_T = \frac{\sum_i n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_T)^2 = 8,428 \quad - \quad \text{таңдама дисперсиясы};$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T = 8,584 \quad - \quad \text{түзетілген таңдама дисперсиясы};$$

- түзетілген таңдама орта квадраттық ауытқуы (Mathcad-та σ):

$$\sigma = \sqrt{s} = 2,93$$

таңдама модасы мен медианасы (Mathcad-та $\text{mode}(X)$ және $\text{median}(X)$):

мода $M_0 = 19$ ең үлкен жиілігі бар вариантаны анықтайды; медиана $M_e = 18$ вариациалық қатардың ортасын анықтады және таңдама көлемінің жұптығына

$$\text{байланысты: } M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{егер } n = 2k + 1 \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & \text{егер } n = 2k \end{cases}$$

в) жиілік және қатысты жиіліктің статистикалық қатары бойынша (Mathcad-та y және p) табамыз:

- алдымен таңдаманың k -шы ретті бастапқы және орталық моменттерін (Mathcad-та $M(k)$ және $m(k)$);

k -ны 3 пен 4 теңестіріп, таңдаманың бастапқы $M(3)=5,355 \cdot 10^3$, $M(4)=9,852 \cdot 10^4$ және таңдаманың орталық $m(3)=-2,645$, $m(4)=147,375$ үшінші және төртінші ретгі моменттерді табамыз;

- таңдама эксцесі $a_x^* = \frac{m(3)}{\sigma^3} = -0,117$;

- асимметрия таңдама коэффициенті $c_x^* = \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0,696$.

Айта кетелік, бұл жерде таңдама ортасы $M(1)=16,826 = \bar{x}_6$, таңдама дисперсиясы $m(2)=7,997 = D_6$, таңдама орта квадраттық ауытқуы $\sigma = \sqrt{m(2)} = 2,828$ да табылған. Олар жоғарыда қарастырылған мәндерден өзгешеленеді, себебі басқа статистикалық қатарлармен анықталған.

Mathcad-тан файл көшірмесі:

$n := 55$ $a := 10$ $b := 23$

$X := (20 \ 15 \ 17 \ 19 \ 23 \ 18 \ 21 \ 15 \ 16 \ 13 \ 20 \ 16 \ 19 \ 20 \ 14 \ 20 \ 16 \ 14 \ 20 \ 19 \dots)$

$a := \min(X)$

$b := \max(X)$

$Y := \text{sort}(X^T)$

$R := b - a$

$R = 13$

$$Y^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	10	11	12	13	13	14	14	14	14	...

$$X^T =$$

	0
0	20
1	15
2	17
3	19
4	23
5	18
6	21
7	15
8	16
9	13
10	20
11	16
12	19
13	20
14	14
15	...

$h = 1.917$

$h := \frac{b - a}{1 + \frac{\ln(55)}{\ln(2)}}$

$h1 := 2$

$m := \frac{R}{h}$

$x0 := a - \frac{h}{2}$

$x0 = 9.041$

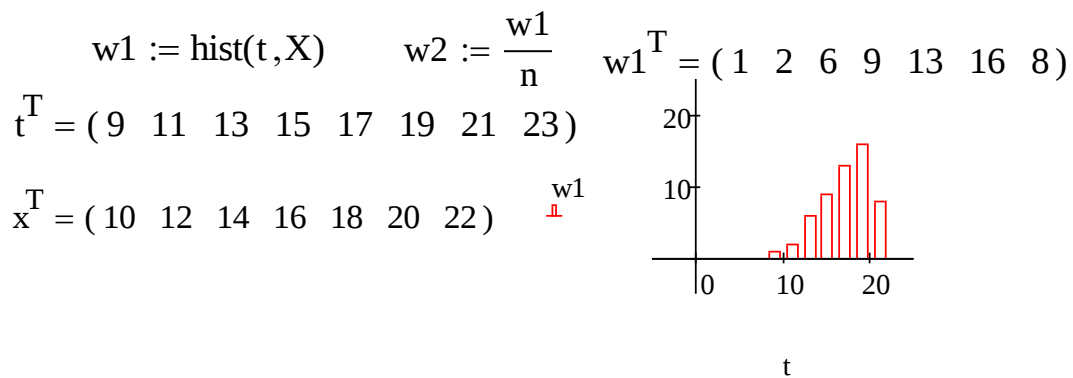
$m = 6.781$

$a1 := 9$

$m1 := 7$ $i := 0..m1 - 1$

$t_j := a1 + h1 \cdot j, \quad j := 0..m1$

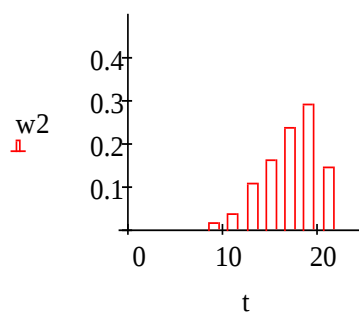
$x_i := t_i + \frac{h1}{2}$



$$w2^T = (0.018 \ 0.036 \ 0.109 \ 0.164 \ 0.236 \ 0.291 \ 0.145)$$

$$0.018 + 0.036 + 0.109 + 0.164 + 0.236 + 0.291 + 0.145 = 0.999$$

$$\text{mode}(X) = 19$$



$$x1 := \text{mean}(X) \quad x1 = 17.564$$

$$M := \text{median}(X)$$

$$M = 18$$

$$s2 := \frac{n}{n-1} \cdot x2$$

$$x2 = 8.428$$

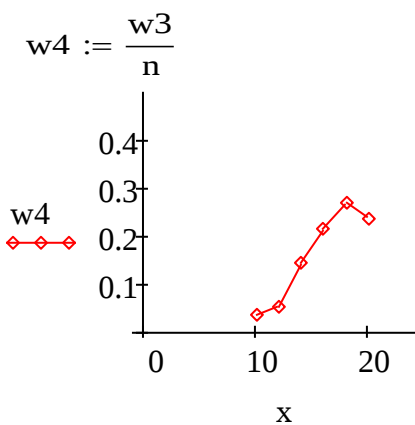
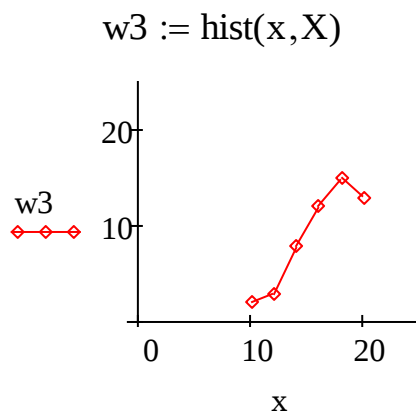
$$\text{stdev}(X) = 2.903$$

$$x2 := \text{var}(X)$$

$$s2 = 8.584$$

$$s := \sqrt{s2}$$

$$s = 2.93$$



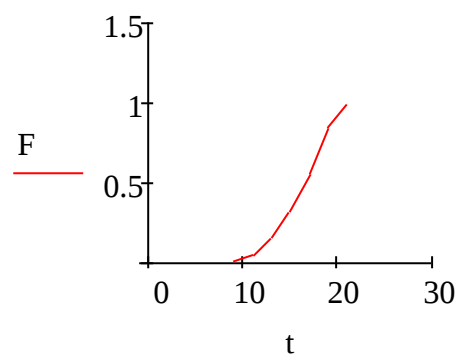
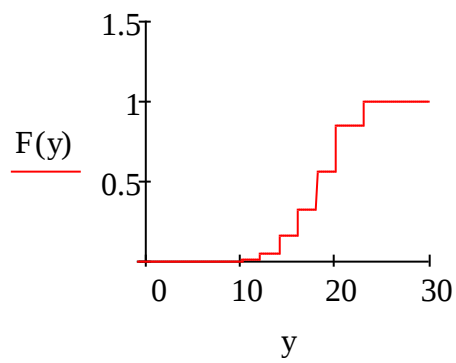
$$i := 0..6$$

$$w := (0.018 \ 0.036 \ 0.109 \ 0.164 \ 0.236 \ 0.291 \ 0.145)^T$$

$$F_i := \sum_{j=0}^i w_j$$

$$F^T = (0.018 \ 0.054 \ 0.163 \ 0.327 \ 0.563 \ 0.854 \ 0.999)$$

$$F(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq 10 \\ 0.018 & \text{if } 10 < y \leq 12 \\ 0.054 & \text{if } 12 < y \leq 14 \\ 0.163 & \text{if } 14 < y \leq 16 \\ 0.327 & \text{if } 16 < y \leq 18 \\ 0.563 & \text{if } 18 < y \leq 20 \\ 0.854 & \text{if } 20 < y \leq 23 \\ 1 & \text{if } y > 23 \end{cases}$$



$$y := (10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 13)^T$$

$$p := (0.018 \ 0.018 \ 0.018 \ 0.036 \ 0.073 \ 0.073 \ 0.091 \ 0.127 \ 0.109 \ 0.145 \ 0.127 \ 0.091 \ 0.018 \ 0.036)^T$$

$$M(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i)^k \cdot p_i \right] \quad m(k) := \sum_{i=0}^{13} \left[(y_i - M(1))^k \cdot p_i \right]$$

$$M(1) = 16.826 \quad m(2) = 7.997 \quad \sigma := \sqrt{m(2)} \quad \sigma = 2.828$$

$$\frac{m(3)}{\sigma^3} = -0.117 \quad \frac{m(4)}{\sigma^4} - 3 = -0.696$$

$$M(3) = 5.355 \times 10^3 \quad m(3) = -2.645$$

$$M(4) = 9.852 \times 10^4 \quad m(4) = 147.375$$

3. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ айнымалы X -ті 25 бақылау нәтижесінде математикалық үміттің және σ орта квадраттық ауытқуының нүктелік бағалары (яғни таңдама ортасы $\bar{x}_e=18$) табылды. $\gamma=0.95$ сенімділікпен осы кездейсоқ шаманың a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын табу керек.

Шешуі: a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалы келесі түрде беріледі

$$\bar{x}_T - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

t –дан басқа шамалар белгілі. t –ны $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$ қатынасынан табамыз, мұндағы $\Phi(t)$ - Лаплас функциясы, оның мәні кестеден алынады. Кестеден $t=1.96$. Олай болса,

$$18 - 1.96 \frac{3}{\sqrt{25}} < a < 18 + 1.96 \frac{3}{\sqrt{25}}.$$

Жауабы: (16,824; 19,176).

4. 1-2 есептердің берілімдері мен нәтижелері үшін қалыпты үлестірім берілген деп ұйғарып, табу керек:

а) таңдама ортасы $\bar{x}_T$ бойынша γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағасының дәлдігін;

б) γ сенімділікпен a математикалық үмітін бағалау үшін сенімділік интервалын.

$\bar{x}_T$ таңдама ортасының, n таңдама көлемінің, σ орта квадраттық ауытқуының мәндерін 1-2 есептен, γ мәнін 3 (немесе 5) есептен алу керек.

Шешуі: 1-2 есептерден таңдама ортасы $\bar{x}_T=17,564$, таңдама көлемі $n=55$, орта квадраттық ауытқуы $\sigma=2,903$, 3 есептен $\gamma=0,95$.

а) a математикалық үміттің бағасының дәлдігі $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ формуласымен анықталады. 3 есептен: $t=1,96$. Сондықтан дәлдік $\delta = \frac{1,96 \cdot 2,903}{\sqrt{55}} \approx 0,77$;

б) 3 есепте көрсетілген формуладан сенімділік интервалы: $17,564 - 1,96 \frac{2,903}{\sqrt{55}} < a < 17,564 + 1,96 \frac{2,903}{\sqrt{55}}$ немесе $16,794 < a < 18,334$.

5. Теңіз тереңдігін өлшейтін құралдың жүйелі қателігі нөлге тең, ал өлшеудің кездейсоқ қатесі $\sigma=15$ орта квадраттық ауытқуымен қалыпты үлестірілген. Теңіз тереңдігін анықтау үшін қатесі $\delta=5$ -тен артық емес, сенімділігі $\gamma=0,9$ болатын қанша тәуелсіз өлшеу жүргізу керек?

Шешуі: математикалық үміттің бағасының дәлдігін анықтайтын $\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ формуладан $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$ аламыз.

t –ны $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,9}{2} = 0,45$ қатынасынан табамыз. Кестеден $t=1,65$. Сондықтан $n = \frac{1,65^2 \cdot 15^2}{5^2} = 24,5025$. Олай болса, 25 –тен кем емес өлшеу жүргізу керек.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері. -Алматы. 2006 – 184 бет.
- 2 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. – Алматы, 2011.
- 3 Сағынтаев С.С., Сағынтаева С.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері, АЭЖБУ, 2021
- 4 Қазешев А. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика бойынша есептер жинағы. – Алматы, 2005.
- 5 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Ықтималдық теориясы және математикалық статистика. 5В070300– Ақпараттық жүйелер мамандығының студенттері үшін есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар мен тапсырмалар. - Алматы: АЭЖБУ, 2016. - 56 б.

Мазмұны

	Кіріспе	3
1	1. Есептік-сызба жұмыс №1. Кездейсоқ оқиғалар	4
2	1.2 Есептік тапсырмалар	4
3	1.3 Типтік варианттың шешуі	11
4	2 Есептік- сызба жұмыс №2. Кездейсоқ шамалар	20
5	2.2 Есептік тапсырмалар	20
6	2.3 Типтік варианттың шешуі	29
7	3.Есептік- сызба жұмыс №3. Математикалық статистика элементтері	46
8	3.2 Есептік тапсырмалар	47
9	3.3 Типтік варианттың шешуі	55
	Әдебиеттер тізімі	64

Астраханцева Людмила Николаевна
Байсалова Мәншүк Жұмамұратовна

ЫҚТИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

Барлық білім беру бағдарламалары бойынша оқитын студенттер үшін
есептеу-сызба жұмыстарды орындауға арналған әдістемелік нұсқаулықтар
мен тапсырмалар.

Редактор:
Стандарттау бойынша маман:

Изтелеуова Ж.Н.
Ануарбек Ж.А.

Басылымға қол қойылды 12.02.2023 ж
Таралымы 50 дана.
Көлемі – 4,0 оқу- бас.ә.

Пішімі 60x84 1/16
Баспаханалық қағаз № 1
Тапсырыс Бағасы 2000 тг.

«Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс
университеті» коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме – көбейту бюросы
050013 Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1